名师讲坛

本期主讲：蒋楚辉

数学版特约主持

长沙市第一中学 数学高级教师 龚日辉

数学试题赏析

长沙市一中数学高级教师 蒋楚辉

【知识范畴】函数、导数、数列、不等式综合问题

例：已知函数 $f(x)=ax-\frac{b}{x}-2\ln x$，f (1)=0.

（1）若函数 f (x)在其定义域内为单调函数，求 a 的取值范围.

（2）若函数 f (x)的图象在 x = 1 处的切线的斜率为 0，且 $a_{n+1}=f'(\frac{1}{a_n-n+1})-n^2+1$，已知 $a_1=4$，求证 $a_n\geqslant 2n+2$.

（3）在（2）的条件下，试比较 $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{1+a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}$ 与 $\frac{2}{5}$ 的大小，并说明理由。

【思路分析】第（1）问实为“超越函数”的单调性问题，求解策略是将“函数 f (x)在区间 A 上单调”等价于“x∈A 时 f′ (x)≥0(f′ (x)≤0)恒成立”；第（2）问有关通项 a_n 的不等式证明，思维的切入方法可以从求得通项公式后进行证明，也可考察通项的前 n 项，总结规律，然后用数学归纳法证明，还可以通过构造函数，利用导数进行证明；（3）有关数列前 n 项和的不等式关系探究，常用方法有适当放缩通项，将其放缩后化归为可求和的特殊数列的通项，求和后再适当放缩最终实现问题求解。

【解析】（1）f (1) = a−b = 0⇒a = b，则 $f(x)=ax-\frac{a}{x}-2\ln x$

$\therefore f'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{2}{x}$，要使 f (x)在定义域(0, +∞)内为单调函数，

则在[0，+∞)内，f′ (x)恒大于 0 或恒小于 0.

当 a = 0 时，$f'(x)=-\frac{2}{x}<0$ 在(0, +∞)内恒成立.

当 a＞0 时，要使 $f'(x)=a(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})^2+a-\frac{1}{a}>0$ 恒成立，$a-\frac{1}{a}>0$，解得 a＞1.

当 a＜0 时，要使 $f'(x)=a(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})^2+a-\frac{1}{a}>0<0$ 恒成立，则 $a-\frac{1}{a}<0$ 解得 a＜−1.

故 a 的取值范围为 a＞1 或 a＜−1 或 a = 0.

（2）由已知 f ′ (1)=0，即 a+a−2=0 得 a=1，

$\therefore f'(x)=(\frac{1}{x}-1)^2$，

$\therefore a_{n+1}=(a_n-n)^2-n^2+1=a_n^2-2na_n+1$.

由数学归纳法：

当 n=1 时，$a_1=4\geqslant 2\times 1+2$，不等式成立.

假设 n=k 时，不等式 $a_n\geqslant 2k+2$ 成立，即 $a_k-2_k\geqslant 2$ 也成立.

则当 n=k+1 时，$a_k+1=a_k(a_k-2_k)+1\geqslant(2k+2)\times 2+1=4k+5>2(k+1)+2$ 成立.

故对一切 n∈N* 都有 $a_n\geqslant 2n+2$ 成立.

（3）由（2）得 $a_n=a_{n-1}(a_{n-1}-2n+2)+1\geqslant a_{n-1}[2(n-1)+2-2n+2]+1=2a_{n-1}+1$. 于是 $a_n+1\geqslant 2(a_{n-1}+1)(n\geqslant 2)$.

所以 $a_2+1\geqslant 2(a_1+1)$，$a_3+1\geqslant 2(a_2+1)\cdots$

$a_n+1\geqslant 2(a_{n-1}+1)$，累乘得 $a_n+1\geqslant 2^{n-1}(a_1+1)$，

则 $\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+a_1}(n\geqslant 2)$.

所以 $=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{1+a_1}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})=\frac{2}{5}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{2}{5}$

【命题立意】函数、导数、不等式、数列的综合问题是高考命题的热点，常以压轴题形式出现，主要考查学生的思维能力；掌握基本题型及解法是基础，依据题设情境，灵活应用转化化归思想、数形结合思想、函数与方程思想，将问题化归为基本问题求解是关键，同时必须努力提高分析能力、创新意识，讲究思维的灵活性和深刻性。

探秘追奇

牛津数学家揭开质数的秘密

英国牛津大学的数学教授 Marcus 和杭州师范大学的于秀源教授，近日在杭州和数学爱好者们一起分享了质数的秘密。

质数为球队带来好运

“西班牙著名的皇马球队，叫皇马，有很多大牌球星，我发现一个规律，他们的球衣号码，很多是质数，像贝克汉姆就选择了 23 号球衣。”Marcus 教授一开头，就讲起了他最喜欢的质数。

Marcus 教授喜欢踢球，但所在球队成绩比较差。发现皇马队的球衣号码的规律后，他有了灵感，“我建议球队，把球衣号码改成 2 号、3 号、5 号等质数，我选择 17 号。那以后，球队真的交了好运，那一年在联盟赛中排第二。”

最先发现质数的是蝉

最先发现质数的，是古希腊人？中国人？都不是，是昆虫发现了质数。“那是一种生活在北美的蝉，它有一个奇怪的生命周期，埋于地下 17 年，然后出现在森林里鸣叫、交配，17 年后死去。”

Marcus 教授说，还有一些蝉，埋于地下的时间是 7 年、13 年，都是质数。“这里面有什么奥秘吗？”Marcus 教授不太肯定，但他有一个理论，蝉的猎食者也有周期，“可能是蝉发现，如果以质数周期出现，它们与猎食者同时出现的几率是最小的。”

最大质数非数学家发现

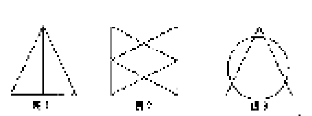
目前世界上最大的质数，有 1000 万多位，如果一位位念出来，要念上两个月时间。发现这个质数的人，是名业余数学爱好者，他因此获得了 10 万美金。

如果有一个 200 位的整数，是用两个质数相乘得到的，那么让全世界最好的计算家，再加上最好的计算机，要算出是哪两个质数相乘，恐怕也需要 200 年。（周红）

趣味解题

你能一笔画出以下图形吗

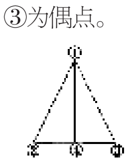
你能笔尖不离纸，一笔画出下面的每个图形吗？（不走重复线路）



要正确解答这道题，必须弄清一笔画图形有哪些特点。早在 18 世纪，瑞士的著名数学家欧拉就找到了一笔画的规律。欧拉认为，能一笔画的图形必须是连通图。连通图就是指一个图形各部分总是有边相连的，这道题中的 3 个图都是连通图。

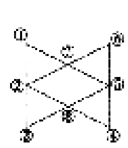
但是，不是所有的连通图都可以一笔画。能否一笔画是由图的奇、偶点的数目来决定。

什么叫奇、偶点？与奇数（单数）条边相连的点叫做奇点；与偶数（双数）条边相连的点叫偶点。如图 1 中的①、④为奇点，②、③为偶点。



数学家欧拉找到一笔画的规律是什么呢？

1.凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成。画时可以把任一偶点为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图。例如，图 2 都是偶点，画的线路可以是：①→③→⑤→⑦→②→④→⑥→⑦→①



2.凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成。画时必须把一个奇点为起点，另一个奇点为终点。例如，图 1 的线路是：①→②→③→①→④

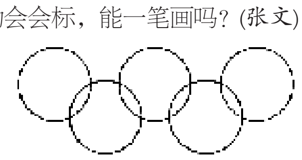
3.其他情况的图都不能一笔画出。

试一试：

1.画出图 1 和图 2 的其他线路。

2.图 3 能一笔画吗？有多少条线路？

3.下图是国际奥林匹克运动会会标，能一笔画吗？（张文）



逆向思维

威力无比的反证法

反证法作为证明方法的一种，有时起着直接证法不可替代的作用。下面的故事，对于我们正确理解反证法很有帮助。

南方某风水先生到北方看风水，恰逢天降大雪。乃作一歪诗：“天公下雪不下雨，雪到地上变成雨；早知雪要变成雨，何不当初就下雨。”他的歪诗又恰被一牧童听到，亦作一打油诗讽刺风水先生：“先生吃饭不吃屎，饭到肚里变成屎；早知饭要变成屎，何不当初就吃屎。”

实际上，小牧童正是巧妙运用了反证法，驳斥了风水先生否定事物普遍运动的规律，只强调结果，不要变化过程的形而上学的错误观点：假设风水先生说的是真理，只强调变化最后的结果，不要变化过程也可，那么，根据他的逻辑，即可得出先生当初就应吃屎的荒唐结论。风水先生当然不会承认这个事实了。那么，显然，他说的就是谬论了。

这就是反证法的威力，一个原本复杂难证的哲学问题被牧童运用了“以其人之道，还其人之身”的反证法迎刃而解了。（徐科）

不要担心你在数学上遇到的困难，我敢保证我遇到的困难比你还大得多。——爱因斯坦