



函数对称性的探究

湖南广益实验中学高 1202 班 李滢

函数难学,这是我们做学生的普遍感受,但函数是中学数学教学的主线,是中学数学的核心内容,也是整个高中数学的基础。函数的性质在数学竞赛和高考中,是重点与热点,函数的对称性是函数的一个基本性质,对称关系不仅广泛存在于数学问题之中,而且利用对称性往往能更简捷地使问题得到解决,对称关系还充分体现了数学之美。本文拟通过函数自身的对称性和不同函数之间的对称性两个方面来探讨函数与对称有关的性质。

一、函数自身的对称性探究

我们知道奇函数的图像关于原点对称,其定义域关于原点对称,且对于定义域内的任意 x 都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立。由此可得。

引理 1:函数 $y = f(x)$ 的图像关于原点 O 对称的充要条件是 $f(x) + f(-x) = 0$

定理 1:函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $A(a, b)$ 对称的充要条件是 $f(x) + f(2a - x) = 2b$

证明:(必要性)设点 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点,

\therefore 点 $P(x, y)$ 关于点 $A(a, b)$ 的对称点 $P'(2a - x, 2b - y)$ 也在 $y = f(x)$ 图像上, $\therefore 2b - y = f(2a - x)$

即 $y + f(2a - x) = 2b$ 故 $f(x) + f(2a - x) = 2b$, 必要性得证。

(充分性)设点 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点, 则 $y_0 = f(x_0)$

$\therefore f(x) + f(2a - x) = 2b \therefore f(x_0) + f(2a - x_0) = 2b$, 即 $2b - y_0 = f(2a - x_0)$ 。

故点 $P'(2a - x_0, 2b - y_0)$ 也在 $y = f(x)$ 图像上,而

点 P 与点 P' 关于点 $A(a, b)$ 对称,充分性得证。我们知道偶函数的图像关于 y 轴对称,下面我们继续研究关于任意一点、任意一条直线对称的问题。

引理 2:函数 $y = f(x)$ 的图像关于 y 轴对称的充要条件是 $f(x) = f(-x)$

定理 2:函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称的充要条件是

$$f(a+x) = f(a-x) \text{ 即 } f(x) = f(2a-x)$$

定理 3:①若函数 $y = f(x)$ 图像同时关于点 $A(a, c)$ 和点 $B(b, c)$ 成中心对称($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数,且 $2|a-b|$ 是它的一个周期。

②若函数 $y = f(x)$ 图像同时关于直线 $x = a$ 和直线 $x = b$ 成轴对称($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数,且 $2|a-b|$ 是它的一个周期。

③若函数 $y = f(x)$ 图像既关于点 $A(a, c)$ 成中心对称又关于直线 $x = b$ 成轴对称($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数,且 $4|a-b|$ 是它的一个周期。

①②的证明留给读者,以下给出③的证明:

证明: \therefore 函数 $y = f(x)$ 图像既关于点 $A(a, c)$ 成中心对称,

$$\therefore f(x) + f(2a - x) = 2c, \text{ 用 } 2b - x \text{ 代 } x \text{ 得:}$$

$$f(2b - x) + f[2a - (2b - x)] = 2c \dots \dots \dots (*)$$

又 \therefore 函数 $y = f(x)$ 图像关于直线 $x = b$ 成轴对称, $\therefore f(2b - x) = f(x)$ 代入(*)得:

$$f(x) = 2c - f[2(a - b) + x] \dots \dots \dots (**), \text{ 用 } 2(a - b) - x \text{ 代 } x \text{ 得}$$

$$f[2(a - b) + x] = 2c - f[4(a - b) + x] \text{ 代入(**)得:}$$

$$f(x) = f[4(a - b) + x], \text{ 故 } y = f(x) \text{ 是周期函数, 且 } 4|a - b| \text{ 是它的一个周期。}$$

二、不同函数对称性的探究

定理 4:函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2b - f(2a - x)$ 的图像关于点 $A(a, b)$ 成中心对称。

定理 5:①函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 成轴对称。

②函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(\alpha - x)$ 的图像关于直线 $x + y = \alpha$ 成轴对称。

③函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(\alpha - x)$ 的图像关于直线 $x - y = \alpha$ 成轴对称。

定理 4 与定理 5 中的①②证明留给读者, 现证定理 5 中的③

证明:设点 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点, 则 $y_0 = f(x_0)$ 。记点 $P(x, y)$ 关于直线 $x - y = \alpha$ 的轴对称点为 $P'(x_1, y_1)$, 则 $x_1 = \alpha + y_0, y_1 = x_0 - \alpha, \therefore x_0 = \alpha + y_1, y_0 = x_1 - \alpha$ 代入 $y_0 = f(x_0)$ 之中得 $x_1 - \alpha = f(\alpha + y_1)$

\therefore 点 $P'(x_1, y_1)$ 在函数 $x - \alpha = f(y + \alpha)$ 的图像上。同理可证:函数 $x - \alpha = f(y + \alpha)$ 的图像上任一点关于直线 $x - y = \alpha$ 的轴对称点也在函数 $y = f(x)$ 的图像上。故定理 5 中的③成立。

推论:函数 $y = f(x)$ 的图像与 $x = f(y)$ 的图像关于直线 $x = y$ 成轴对称。

三、三角函数图像的对称性列表

$y = \sin x$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \cos x$	$(\pi, 0)$	$x = \pi$
$y = \tan x$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \cot x$	$(\pi, 0)$	$x = \pi$

注:①上表中 $k \in \mathbb{Z}$

四、函数对称性应用举例

例 1:定义在 \mathbb{R} 上的非常数函数满足: $f(10+x)$ 为偶函数,且 $f(5-x) = f(5+x)$, 则 $f(x)$ 一定是()

(A)是偶函数,也是周期函数;(B)是偶函数,但不是周期函数;(C)是奇函数,也是周期函数;(D)是奇函数,但不是周期函数

解: $\therefore f(10+x)$ 为偶函数, $\therefore f(10+x) = f(10-x)$ 。

$\therefore f(x)$ 有两条对称轴 $x = 5$ 与 $x = 10$, 因此 $f(x)$ 是以 10 为其一个周期的周期函数, $\therefore x = 0$ 即 y 轴也是 $f(x)$ 的对称轴,因此 $f(x)$ 还是一个偶函数。

故选(A)

例 2:设定义域为 \mathbb{R} 的函数 $y = f(x), y = g(x)$ 都有反函数,并且 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-2)$ 函数的图像关于直线 $y = x$ 对称,若 $g(5) = 2012$, 那么 $f(4) = ()$ 。

(A) 2011; (B) 2012; (C) 2013; (D) 2014。

解: $\therefore y = f(x-1)$ 和 $y = g^{-1}(x-2)$ 函数的图像关于直线 $y = x$ 对称,

$\therefore y = g^{-1}(x-2)$ 反函数是 $y = f(x-1)$, 而 $y = g^{-1}(x-2)$ 的反函数是 $y = 2 + g(x)$, $\therefore f(x-1) = 2 + g(x)$,

\therefore 有 $f(5-1) = 2 + g(5) = 2014$

故 $f(4) = 2014$, 应选(D)

例 3:设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数,且 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时,

$$f(x) = -\frac{1}{2}x, \text{ 则 } f(8.6) = \underline{\hspace{2cm}}$$

解: $\therefore f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $\therefore x = 0$ 是 $y = f(x)$ 对称轴;

又 $\therefore f(1+x) = f(1-x) \therefore x = 1$ 也是 $y = f(x)$ 对称轴。故 $y = f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $\therefore f(8.6) = f(8+0.6) = f(0.6) = f(-0.6) = 0.3$

通过政府回应力建设实现信访终结的探索

中南大学公共管理学院 于新凡

信访是群众表达诉求、维护权益的重要途径。随着改革开放事业的深入推进,社会矛盾复杂交织,信访活动易发高发。在信访工作中,最突出的问题是信访案件不能有效终结,个别群众重访、集访、缠访,破坏了正常的上访秩序,占用了大量的信访资源。如何有效终结信访案件,成为各级政府和学术界关注研究的重点。笔者通过长期实践发现,政府对信访诉求进行有效回应,能显著提升信访案件终结率。

政府回应,从广义上说是指政府为满足社会需求而提供的公共服务。本文探讨的政府回应,具体到信访领域,是指政府与社会公众之间进行的沟通互动。我们认为,加强政府回应力建设,提升政府回应的效率和效力,是终结信访案件的重要条件。加强政府回应力建设,应把握以下几个重点:

一是树立政府回应的民本意识。信访工作的本质是为群众排忧解难。但在实际工作中,有些地方政府有时自觉不自觉地把自己和政府与信访群众对立起来,甚至认为访民即刁民,习惯站在政府的立场上考虑问题,有时在作出政府回应时敷衍塞责、回避矛盾、推脱责任,这样不但无助于问题的解决,反而会助长非正常上访行为的发生。因此,树立以民为本的回应理念,是增强政府回应力的重要前提。只有坚持以民为本,一切工作以群众满意为根本目标和最终归宿,才能改变当前政府回应力弱化的状态。具体到信访案件中,政府要始终站在维护和发展群众合法权益的立场上作出回应,最大限度体察和满足群众的合理诉求,从而使信访问题得到及时有效的回应和公平公正的解决。鉴于一部分信访问题与政府行政行为失当有关,政府一定要站在群众的立场上自我剖析、自我反思,敢于承认错误,敢于担当责任,敢于做出正确的回应,而不是新的错误来掩盖过去的错误。

二是加强政府回应的制度建设。信访问题难以终结的一个重要原因,是政府回应的制度

体系不健全。具体表现为:重回应,轻落实;接访、回应、办理等环节各自为政,缺乏统筹协调;信访部门的权责不对等,绩效考核体系不够科学等等。除了要对现行回应制度进行修改完善之外,还应进行大胆的制度创新,摆脱政府回应制度资源不足的窘境。要将政府回应涉及的内容和各环节操作规范以制度的形式确定下来,明确政府回应的责任主体、办理结果、适用依据、办理时限、申诉方式等,明确公众接受政府回应时的权利、义务、责任和救济渠道。对于群体性事件、自然灾害等突发事件的回应,应制定相应的预防和回应机制,使政府回应应有法可依、有规可循。要进一步优化政府回应的考核体系,确保政府回应的事前、事中、事后全流程可监管、可考核、可追责。尤其是要着重加强政府回应后的配套制度体系建设,确保政府回应事项能够得到及时有效的落实,进而促进信访终结。

三是提升政府回应的质量标准。政府回应体现政府管治能力、服务水平的重要载体,高质量的政府回应是促进信访终结的基本条件,其应达到四个标准:第一,要依法依规。当前,群众的法制观念、维权观念日益增强,这对政府回应的法制化水平提出了更高的要求。要公平公正地处理和答复信访诉求,做到言之有据、不偏不倚,在法律规章的框架下妥善解决问题。即便驳回信访诉求,只要政府依法办事,也会得到社会的认可。第二,要求真务实。信访诉求往往是非常具体的,政府回应的根本目标应是解决问题。政府应本着解决问题、直面矛盾的态度作出回应,拿出切实可行的路线图和时间表,而不是踢皮球、绕弯子,也不是时而施以小恩小惠而培养一批“职业访民”,更不是为了一时息访而乱表态、夸海口。第三,要公开透明。按照“公开是原则、不公开是例外”的要求,及时准确地公开政府信息,切实保障群众的知情权、监督权,让政府回应从控制民意的暗箱操作转变为尊重民意的透明作业,让公权在阳

光下运行。第四,要及时高效。有些信访问题错失时机,一拖几年,既大幅增加了解决信访问题的成本,也深深地伤害了民意。因此,必须在最佳时机作出政府回应,不断提高政府回应的效率。

四是搭建政府回应的畅通渠道。政府回应力能否提高,很大程度上取决于政府回应的渠道是否畅通。首先,要畅通政府内部沟通渠道。信访部门本身并不具备办结信访案件的职能,通常需要将信访信息转办到其他部门,所以政府部门间的信息沟通非常重要。畅通内部沟通渠道,可以通过建立跨部门的信息共享平台来实现,也可通过定期召开信访联席会议以提升快速沟通合作能力。其次,要畅通政府和群众之间的沟通渠道。尽可能创造条件促使民众合法表达诉求,如推行公开接访制度,接受群众反映问题;积极深入基层,主动搜集掌握情况;开辟网络信访平台,促进信访渠道的多元化。畅通政府与群众之间的沟通渠道,不仅有助于把信访问题化解在萌芽状态,也有助于树立良好的、亲民的政府形象。第三,要畅通政府和媒体之间的沟通渠道。面对媒体对信访案件的追问,政府部门往往选择回避,这不仅无助于矛盾的化解,反而有可能导致媒体误听误判,进而误导舆论。因此,要将与媒体建立良好沟通作为增强政府回应力的重要途径,充分发挥媒体在引导社会舆论方面的积极作用。

五是完善政府回应的评价机制。对于政府回应是否公平公正,信访案件的有关各方往往各执一词。因此,当政府回应面临质疑时,需要建立更加科学的政府回应评价体系,提升政府回应的权威性和公信力。第一,评价主体要多元。政府不能既当裁判员,又当运动员,可大胆引入第三方机构对政府回应的有效性进行判定。第三方机构应是以提供公共服务为取向、不以盈利为目标、不具有强制性、独立于政府和个体之外的机构,既可以是常设机构,也可以是临时召集组成的听证团。成员可以由本地

区的人大代表、政协委员、专家学者等知名人士、知名律师或法律工作者以及邻近地区熟悉情况、立场中立的居民组成,通过投票表决等民主方式对政府回应作出有效或无效的判定。第二,评价标准要科学。评价标准应主要包括:信访主体和回应主体是否匹配,信访诉求是否合理,事实脉络是否清晰,处置意见是否明确,承诺事项是否可行,适用法律规章是否适当,回应时限是否达标,等等。总之,评价标准应是中立的,有利于作出公正客观的评价。根据信访诉求的特殊性,也可制定个性化、灵活性的评价标准,提升评价标准的针对性。第三,评价流程要民主。参与评价的人员的产生过程应公开透明,切实保障信访诉求有关各方表达意见的权力,给予第三方机构充分的质询权和独立自主的表决权。在评价的过程中,应重点对信访诉求及政府回应的合法性进行质证,确保评价结果公平公正。我们认为,只要政府对自身作出的回应有足够的自信,就应大胆地接受社会评价。

六是强化政府回应的法制保障。在实践中,即便政府作出了有效回应,也有可能由于信访人抵制而难以实现信访终结。因此,要建立起有效的法制保障,确保政府回应有效性判定生效后的法律效力。首先,应允许信访人对政府回应的有效性进行申诉,给予其行政救济权力,即向政府法制部门申请行政复议,由政府法制部门对政府回应及评价的全过程进行复核。如果复核认定政府回应无效或有误,应责令相关部门予以纠正并重新作出回应。如果复核认定政府回应有效,则标志着信访案件在程序上完全终结,相关法律法规应确保该回应的法律效力。如信访人仍对此回应不服,或是无视此回应而继续上访,各级信访部门应依法不予受理,确保政府不因某一信访案件而反复回应,造成公共资源的无谓浪费。对于信访人实施非正常上访或其他违法行为的,应依其情节予以惩戒。