

令  $t = \frac{b}{c}$ , 则  $-1 < t < 1$ ,  $\frac{c+2b}{b+c} = 2 - \frac{1}{1+t}$ . 而函数  $g(t) = 2 - \frac{1}{1+t}$  ( $-1 < t < 1$ ) 的值域是  $(-\infty, \frac{3}{2})$ . 因此, 当  $c > |b|$  时,  $M$  的取值集合为  $[\frac{3}{2}, +\infty)$ .

当  $c = |b|$  时, 由 (I) 知,  $b = \pm 2, c = 2$ . 此时  $f(c) - f(b) = -8$  或  $0, c^2 - b^2 = 0$ , 从而  $f(c) - f(b) \leq \frac{3}{2}(c^2 - b^2)$  恒成立.

综上所述,  $M$  的最小值为  $\frac{3}{2}$ .

21. (本小题满分 13 分)

数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 中,  $a_1 = a, a_{n+1}$  是函数  $f_n(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3a_n + n^2)x^2 + 3n^2a_nx$  的极小值点.

- (I) 当  $a=0$  时, 求通项  $a_n$ ;  
 (II) 是否存在  $a$ , 使数列  $\{a_n\}$  是等比数列? 若存在, 求  $a$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

解 易知  $f'_n(x) = x^2 - (3a_n + n^2)x + 3n^2a_n = (x - 3a_n)(x - n^2)$ .

令  $f'_n(x) = 0$ , 得  $x_1 = 3a_n, x_2 = n^2$ .

- (1) 若  $3a_n < n^2$ , 则  
 当  $x < 3a_n$  时,  $f'_n(x) > 0, f_n(x)$  单调递增;  
 当  $3a_n < x < n^2$  时,  $f'_n(x) < 0, f_n(x)$  单调递减;  
 当  $x > n^2$  时,  $f'_n(x) > 0, f_n(x)$  单调递增.  
 故  $f_n(x)$  在  $x = n^2$  取得极小值.

(2) 若  $3a_n > n^2$ , 仿 (1) 可得,  $f_n(x)$  在  $x = 3a_n$  取得极小值.

(3) 若  $3a_n = n^2$ , 则  $f'_n(x) \geq 0, f_n(x)$  无极值.

- (I) 当  $a=0$  时,  $a_1 = 0$ , 则  $3a_1 < 1^2$ . 由 (1) 知,  $a_2 = 1^2 = 1$ .  
 因  $3a_2 = 3 < 2^2$ , 则由 (1) 知,  $a_3 = 2^2 = 4$ .  
 因为  $3a_3 = 12 > 3^2$ , 则由 (2) 知,  $a_4 = 3a_3 = 3 \times 4$ .  
 又因为  $3a_4 = 36 > 4^2$ , 则由 (2) 知,  $a_5 = 3a_4 = 3^2 \times 4$ .  
 由此猜测: 当  $n \geq 3$  时,  $a_n = 4 \times 3^{n-3}$ .  
 下面先用数学归纳法证明: 当  $n \geq 3$  时,  $3a_n > n^2$ .

事实上, 当  $n=3$  时, 由前面的讨论知结论成立.  
 假设当  $n=k$  ( $k \geq 3$ ) 时,  $3a_k > k^2$  成立, 则由 (2) 知,  $a_{k+1} = 3a_k > k^2$ , 从而

$$3a_{k+1} - (k+1)^2 > 3k^2 - (k+1)^2 = 2k(k-2) + 2k - 1 > 0,$$

所以  $3a_{k+1} > (k+1)^2$ .  
 故当  $n \geq 3$  时,  $3a_n > n^2$  成立.

于是由 (2) 知, 当  $n \geq 3$  时,  $a_{n+1} = 3a_n$ , 而  $a_3 = 4$ , 因此  $a_n = 4 \times 3^{n-3}$ .

综上所述, 当  $a=0$  时,  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = 4 \times 3^{n-3}$  ( $n \geq 3$ ).

(II) 存在  $a$ , 使数列  $\{a_n\}$  是等比数列.  
 事实上, 由 (2) 知, 若对任意的  $n$ , 都有  $3a_n > n^2$ , 则  $a_{n+1} = 3a_n$ . 即数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a$ , 公比为 3 的等比数列, 且  $a_n = a \cdot 3^{n-1}$ .

而要想  $3a_n > n^2$ , 即  $a \cdot 3^n > n^2$  对一切  $n \in \mathbb{N}^*$  都成立, 只需  $a > \frac{n^2}{3^n}$  对一切  $n \in \mathbb{N}^*$  都成立.

记  $b_n = \frac{n^2}{3^n}$ , 则  $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{4}{9}, b_3 = \frac{1}{3}, \dots$

令  $y = \frac{x^2}{3^x}$ , 则  $y' = \frac{1}{3^x}(2x - x^2 \ln 3) < \frac{1}{3^x}(2x - x^2)$ . 因此, 当  $x \geq 2$  时,  $y' < 0$ , 从而函数  $y = \frac{x^2}{3^x}$  在  $[2, +\infty)$  上单调递减. 故当  $n \geq 2$  时, 数列  $\{b_n\}$  单调递减, 即数列

$\{b_n\}$  中最大项为  $b_2 = \frac{4}{9}$ . 于是当  $a > \frac{4}{9}$  时, 必有  $a > \frac{n^2}{3^n}$ . 这说明, 当  $a \in (\frac{4}{9}, +\infty)$  时, 数列  $\{a_n\}$  是等比数列.

当  $a = \frac{4}{9}$  时, 可得  $a_1 = \frac{4}{9}, a_2 = \frac{4}{3}$ . 而  $3a_2 = 4 = 2^2$ , 由 (3) 知,  $f_2(x)$  无极值, 不合题意.

当  $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{9}$  时, 可得  $a_1 = a, a_2 = 3a, a_3 = 4, a_4 = 12, \dots$ , 数列  $\{a_n\}$  不是等比数列.

当  $a = \frac{1}{3}$  时,  $3a = 1 = 1^2$ , 由 (3) 知,  $f_1(x)$  无极值, 不合题意.

当  $a < \frac{1}{3}$  时, 可得  $a_1 = a, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 12, \dots$ , 数列  $\{a_n\}$  不是等比数列.

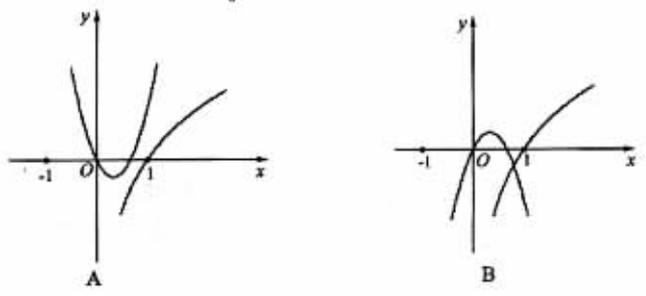
综上所述, 存在  $a$ , 使数列  $\{a_n\}$  是等比数列, 且  $a$  的取值范围为  $(\frac{4}{9}, +\infty)$ .

# 三湘都市报华声在线恭祝各位高考学子心想事成!

## 数 学 (文史类)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

- 复数  $\frac{2}{1-i}$  等于  
 A.  $1+i$       B.  $1-i$       C.  $-1+i$       D.  $-1-i$       **[A]**
- 下列命题中的假命题是  
 A.  $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x = 0$       B.  $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 1$   
 C.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 > 0$       D.  $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$       **[C]**
- 某商品销售量  $y$  (件) 与销售价格  $x$  (元/件) 负相关, 则其回归方程可能是  
 A.  $\hat{y} = -10x + 200$       B.  $\hat{y} = 10x + 200$   
 C.  $\hat{y} = -10x - 200$       D.  $\hat{y} = 10x - 200$       **[A]**
- 极坐标方程  $\rho = \cos \theta$  和参数方程  $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 2+t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 所表示的图形分别是  
 A. 直线、直线      B. 直线、圆      C. 圆、圆      D. 圆、直线      **[D]**
- 设抛物线  $y^2 = 8x$  上一点  $P$  到  $y$  轴的距离是 4, 则点  $P$  到该抛物线焦点的距离是  
 A. 4      B. 6      C. 8      D. 12      **[B]**
- 若非零向量  $a, b$  满足  $|a| = |b|, (2a+b) \cdot b = 0$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为  
 A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $150^\circ$       **[C]**
- 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边长分别为  $a, b, c$ . 若  $\angle C = 120^\circ, c = \sqrt{2}a$ , 则  
 A.  $a > b$       B.  $a < b$   
 C.  $a = b$       D.  $a$  与  $b$  的大小关系不能确定      **[A]**
- 函数  $y = ax^2 + bx$  与  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  ( $ab \neq 0, |a| \neq |b|$ ) 在同一直角坐标系中的图象可能是



## 定向 招收 32 名高中、中专生

继高房价后,“动漫产业发展”、“游戏人才培养”成为两会关注的又一热点话题。人才是创意文化产业发展的源动力,但大学毕业生会美术的不会软件,会软件操作的缺乏基本的美术常识,以致于很多动漫游戏企业开出:底薪 4000、五险一金的优厚待遇也很难招到合适的人才。

而找工作的大学生中,普通的办公室文员都能吸引数千名应聘者疯抢。文员、业务员、服务员甚至成了“天之骄子”的首选。“对新兴产业认识不足”、“缺乏相应技能”使这些完全可以成为白领的大学生,很难在动漫游戏产业里面找到合适的位置。

近日央视八套热播的《武林外传》深受广大喜爱,该制作组有十多名汇众的学子。企业给予他们很高的评价及待遇。邱蓓蓓说:“面对大学生就业压力大的现状,高中毕业的我,人生的第一部作品就能在央视播放,真的让我非常惊喜。”据了解该剧将制作二年之久,央视的中国新闻节目也将专题报道。

6 年汇众教育, 15648 名学生, 1136 家战略合作企业, 确保了“1 个萝卜 1 个坑”、“1 个学生 1 个商业作品”, 平均 90% 以上的高薪就业率赢得了工业与信息化部、劳动和社会保障部的高度赞扬。长沙动漫游戏学院在上海盛大、北京金山等 5 家战略合作企业的支持下, 推出“大中专生就业实训工程”。面向全省定向招收 32 人, 入学要求中等以上学历, 合格毕业生入职后平均月薪在 2000-4000 元之间, 工作 1 年后月薪在 4000-6000 元; 工作 2 年后月薪在 6000-8000 元。

订座电话: 0731-84457601 82681687 网址: www.gamfe.com/cs

## 3G 通信时代 优质的就业岗位 培养通信人才的摇篮

# 长沙通信职业技术学院

(原湖南省邮电学校) 公办全日制

网址: www.csctc.net  
 招生代码: 4361

热忱欢迎广大考生和家长来我院考察

学院地址: 湖南省长沙市天心区南湖路沙湖街 128 号 QQ 及邮箱: 1255104862  
 招生电话: 0731-85201868 85201878 传真: 0731-85202779

