数　学（文科）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|3-2x>0\}$，则　【A】

A. $A\cap B=\{x|x<\frac{3}{2}\}$　　B. $A\cap B=\varnothing$

C. $A\cup B=\{x|x<\frac{3}{2}\}$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果，选了 n 块地作试验田。这 n 块地的亩产量(单位：kg)分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，下面给出的指标中可以用来评估该种农作物亩产量稳定程度的是　【B】

A. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数　　B. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差

C. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最大值　　D. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是　【C】

A. $i(1+i)^2$　　B. $i^2(1-i)$　　C. $(1+i)^2$　　D. $i(1+i)$

4. 如图，正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图。正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称。在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是　【B】

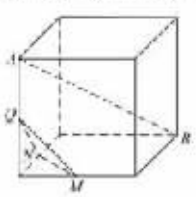
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

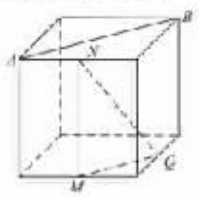
5. 已知 F 是双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点，P 是 C 上一点，且 PF 与 x 轴垂直，点 A 的坐标是 $(1,3)$，则 $\triangle APF$ 的面积为　【D】

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

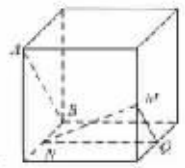
6. 如图，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是　【A】



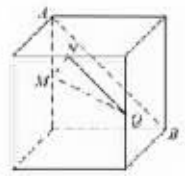
A.



B.



C.

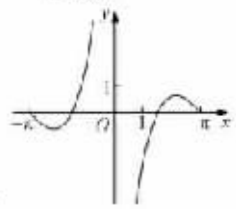


D.

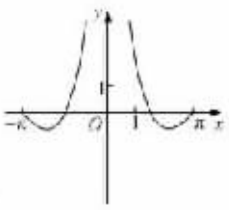
7. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\ x-y\geqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为　【D】

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

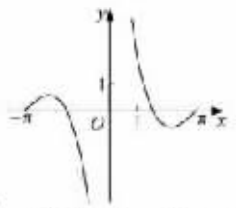
8. 函数 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为　【C】



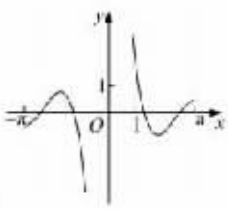
A.



B.



C.



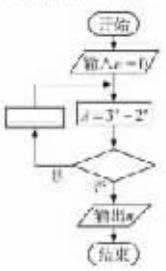
D.

9. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则　【C】

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增　　B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

10. 右面程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1\,000$ 的最小偶数 n，那么在◇和▭两个空白框中，可以分别填入　【D】



A. $A>1\,000$ 和 $n=n-1$

B. $A>1\,000$ 和 $n=n+2$

C. $A\leqslant 1\,000$ 和 $n=n+1$

D. $A\leqslant 1\,000$ 和 $n=n+2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c。已知 $\sin B-\sin A\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则 $C=$　【B】

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

12. 设 A，B 是椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$，则 m 的取值范围是　【A】

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $m=$ <u>7</u>。

14. 曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为 <u>$y=x+1$</u>。

15. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$ <u>$\frac{3\sqrt{10}}{10}$</u>。

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径。若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为9，则球 O 的表面积为 <u>36π</u>。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_2=2$，$S_3=-6$。

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 S_n，并判断 S_{n+1}，S_n，S_{n+2} 是否成等差数列。

解：

（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q。由题设可得

$$\begin{cases}a_1(1+q)=2,\\ a_1(1+q+q^2)=-6.\end{cases}$$

解得 $q=-2$，$a_1=-2$。

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(-2)^n$。

（2）由（1）可得

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{2}{3}+(-1)^n\frac{2^{n+1}}{3}.$$

由于

$$S_{n+2}+S_{n+1}=-\frac{4}{3}+(-1)^n\frac{2^{n+3}-2^{n+2}}{3}=2[-\frac{2}{3}+(-1)^n\frac{2^n}{3}]=2S_n.$$

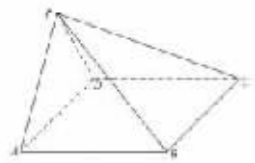
故 S_{n+1}，S_n，S_{n+2} 成等差数列。

18.（12分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB//CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$。

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD；

（2）若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积。



解：

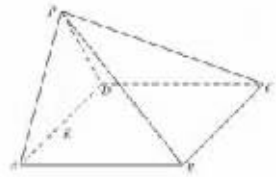
（1）由已知 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，得 $AB\perp AP$，$CD\perp PD$。

由于 $AB//CD$，故 $AB\perp PD$，从而 $AB\perp$ 平面 PAD。

又 $AB\subset$ 平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD。

（2）在平面 PAD 内作 $PE\perp AD$，垂足为 E。

由（1）知，$AB\perp$ 平面 PAD，故 $AB\perp PE$，可得 $PE\perp$ 平面 $ABCD$。



设 $AB=x$，则由已知可得 $AD=\sqrt{2}x$，$PE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$。

故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积

$$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}AB\cdot AD\cdot PE=\frac{1}{3}x^3.$$

由题设得 $\frac{1}{3}x^3=\frac{8}{3}$，故 $x=2$。

从而 $PA=PD=2$，$AD=BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=2\sqrt{2}$。

可得四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为

$$\frac{1}{2}PA\cdot PD+\frac{1}{2}PA\cdot AB+\frac{1}{2}PD\cdot DC+\frac{1}{2}BC^2\sin 60^\circ=6+2\sqrt{3}.$$

19.（12分）

为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每隔30 min从该生产线上随机抽取一个零件，并测量其尺寸（单位：cm）。下面是检验员在一天内依次抽取的16个零件的尺寸：

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2)}\approx 0.212$，

$\sqrt{\sum_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx 18.439$，$\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})(i-8.5)=-2.78$，其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$。

（1）求 (x_i,i)（$i=1,2,\cdots,16$）的相关系数 r，并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小（若 $|r|<0.25$，则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小）。