

(2) 一天为抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

(i) 试说明上述监控生产过程方法的合理性;

(ii) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$, $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} \approx 0.212$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i=1, 2, \dots, 16$.

用样本平均数 \bar{x} 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$. 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查? 剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据, 用剩下的数据估计 μ 和 σ (精确到 0.01).

附: 若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu-3\sigma < Z < \mu+3\sigma) = 0.9974$.

$$0.9974^3 \approx 0.9592, \quad \sqrt{0.008} \approx 0.09.$$

解:

(1) 抽取的一个零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026, 从而零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.0026. 故 $X \sim B(16, 0.0026)$. 因此

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.9974^{16} \approx 0.0408.$$

X 的数学期望为 $EX = 16 \times 0.0026 = 0.0416$.

(2) (i) 如果生产状态正常, 一个零件尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率只有 0.0026, 一天内抽取的 16 个零件中, 出现尺寸在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的零件的概率只有 0.0408, 发生的概率很小. 因此一旦发生这种情况, 就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查. 可见上述监控生产过程的方法是合理的.

(ii) 由 $\bar{x} = 9.97$, $s \approx 0.212$, 知 μ 的估计值为 $\hat{\mu} = 9.97$, σ 的估计值为 $\hat{\sigma} = 0.212$. 由样本数据可以看出有一个零件的尺寸在 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外, 因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据 9.22, 剩下数据的平均数为

$$\frac{1}{15} (15 \times 9.97 - 9.22) = 10.02,$$

因此 μ 的估计值为 10.02.

$$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 16 \times 0.212^2 + 16 \times 9.97^2 \approx 1591.134,$$

剔除 $(\hat{\mu}-3\hat{\sigma}, \hat{\mu}+3\hat{\sigma})$ 之外的数据 9.22, 剩下数据的样本方差为

$$\frac{1}{15} (1591.134 - 9.22^2 - 15 \times 10.02^2) \approx 0.008,$$

因此 σ 的估计值为 $\sqrt{0.008} \approx 0.09$.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有二点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1, 证明: l 过定点.

解:

(1) 由于 P_2, P_4 均关于 y 轴对称, 故由题设知 C 经过 P_2, P_4 两点.

又由 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2} - \frac{3}{4b^2}$ 知, C 不经过点 P_1 , 所以点 P_1 在 C 上.

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l, A 与直线 l, B 的斜率分别为 k_1, k_2 .

如果 l 与 x 轴垂直, 设 $l: x=t$. 由题设知 $t \neq 0$, 且 $|t| < 2$, 可得 A, B 的坐标分别为 $(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$, $(t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$.

$$\text{则 } k_1 + k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t} = -1, \text{ 得 } t=2. \text{ 不符合题设.}$$

从而可设 $l: y=kx+m (m \neq 1)$. 将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得

$$(4k^2+1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

由题设知 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$.

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2). \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2+1}, x_1 x_2 = \frac{4m^2-4}{4k^2+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1-1}{x_1} + \frac{y_2-1}{x_2} \\ &= \frac{kx_1+m-1}{x_1} + \frac{kx_2+m-1}{x_2} \\ &= \frac{2kx_1x_2 + (m-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2} \end{aligned}$$

由题设 $k_1 + k_2 = -1$, 故 $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1+x_2) = 0$.

$$\text{即 } (2k-1) \frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1) \frac{-8km}{4k^2+1} = 0.$$

$$\text{解得 } k = \frac{m+1}{2}.$$

当且仅当 $m > -1$ 时, $\Delta > 0$, 于是 $k = \frac{m+1}{2}x + m$, 即 $y+1 = \frac{m+1}{2}(x-2)$, 所以 l 过定点 $(2, -1)$.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

解:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x - 1)$.

(i) 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减.

(ii) 若 $a > 0$, 则由 $f'(x) = 0$ 得 $x = -\ln a$.

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 单调递增.

(2) (i) 若 $a \leq 0$, 由 (1) 知, $f(x)$ 至多有一个零点.

(ii) 若 $a > 0$, 由 (1) 知, 当 $x = -\ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为

$$f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a.$$

① 当 $a = 1$ 时, 由于 $f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点;

② 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, 由 $1 - \frac{1}{a} + \ln a > 0$, 即 $f(-\ln a) > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点;

③ 当 $a \in (0, 1)$ 时, $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$, 即 $f(-\ln a) < 0$.

又 $f(-2) = ae^{-2} + (a-2)e^{-2} + 2 = 2e^{-2} - 2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 有一个零点.

设正整数 n_0 满足 $n_0 > \ln \frac{3}{a} - 1$, 则 $f(n_0) = e^{2n_0} (ae^{2n_0} - a - 2) - n_0 > e^{2n_0} - n_0 > 2^{n_0} - n_0 > 0$.

由于 $\ln \frac{3}{a} - 1 > -\ln a$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 有一个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, 1)$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + 4t \\ y = 1 - t \end{cases}$ (t 为参数).

(1) 若 $a = -1$, 求 C 与 l 的交点坐标;

(2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a .

解:

(1) 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

当 $a = -1$ 时, 直线 l 的普通方程为 $x + 4y - 3 = 0$.

$$\begin{cases} x+4y-3=0 \\ \frac{x^2}{9}+y^2=1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{21}{25} \\ y=\frac{24}{25} \end{cases}$$

从而 C 与 l 的交点坐标为 $(3, 0)$, $(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25})$.

(2) 直线 l 的普通方程为 $x + 4y - a - 4 = 0$. 故 C 上的点 $(3\cos \theta, \sin \theta)$ 到 l 的距离为

$$d = \frac{|3\cos \theta + 4\sin \theta - a - 4|}{\sqrt{17}}.$$

当 $a \geq -4$ 时, d 的最大值为 $\frac{a+9}{\sqrt{17}}$. 由题设得 $\frac{a+9}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$, 所以 $a = 8$.

当 $a < -4$ 时, d 的最大值为 $\frac{-a-1}{\sqrt{17}}$. 由题设得 $\frac{-a-1}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$, 所以 $a = -16$.

综上, $a = 8$ 或 $a = -16$.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4$, $g(x) = |x+1| + |x-1|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 求 a 的取值范围.

解:

(1) 当 $a = 1$ 时, 不等式 $f(x) \geq g(x)$ 等价于 $x^2 - x + |x+1| + |x-1| - 4 \leq 0$. ①

当 $x < -1$ 时, ①式化为 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. 无解.

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, ①式化为 $x^2 - x - 2 \leq 0$. 从而 $-1 \leq x \leq 1$.

当 $x > 1$ 时, ①式化为 $x^2 + x - 4 \leq 0$. 从而 $1 < x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

所以 $f(x) \geq g(x)$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\}$.

(2) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $g(x) = 2$.

所以 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 等价于当 $x \in [-1, 1]$ 时 $f(x) \geq 2$.

又 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 的最小值必为 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 之一, 所以 $f(-1) \geq 2$ 且 $f(1) \geq 2$, 得 $-1 \leq a \leq 1$.

所以 a 的取值范围为 $[-1, 1]$.