如图(b)，以O为坐标原点，OB，OC，OO_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系$O-xyz$．不妨设$AB=2$．因为$\angle CBA=60°$，所以$OB=\sqrt{3}$，$OC=1$，于是相关各点的坐标为：$O(0,0,0)$，$B_1(\sqrt{3},0,2)$，$C_1(0,1,2)$．

易知，$n_1=(0,1,0)$是平面BDD_1B_1的一个法向量．

设$n_2=(x,y,z)$是平面OB_1C_1的一个法向量，则$\begin{cases} n_2\cdot\overrightarrow{OB_1}=0, \\ n_2\cdot\overrightarrow{OC_1}=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} \sqrt{3}x+2z=0, \\ y+2z=0. \end{cases}$

取$z=-\sqrt{3}$，则$x=2$，$y=2\sqrt{3}$，所以$n_2=(2,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$．

设二面角C_1-OB_1-D的大小为θ，易知θ是锐角，于是

$$\cos\theta=|\cos<n_1,n_2>|=\left|\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

故二面角C_1-OB_1-D的余弦值为$\frac{2\sqrt{57}}{19}$．

20．(本小题满分13分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$|a_{n+1}-a_n|=p^n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(Ⅰ)若$\{a_n\}$是递增数列，且a_1，$2a_2$，$3a_3$成等差数列，求p的值；

(Ⅱ)若$p=\frac{1}{2}$，且$\{a_{2n-1}\}$是递增数列，$\{a_{2n}\}$是递减数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

解 (Ⅰ)因为$\{a_n\}$是递增数列，所以$a_{n+1}-a_n=|a_{n+1}-a_n|=p^n$．而$a_1=1$，因此

$$a_2=p+1,\quad a_3=p^2+p+1.$$

又a_1，$2a_2$，$3a_3$成等差数列，所以$4a_2=a_1+3a_3$，因而$3p^2-p=0$，解得

$$p=\frac{1}{3},\quad p=0.$$

当$p=0$时，$a_{n+1}=a_n$，这与$\{a_n\}$是递增数列矛盾．故$p=\frac{1}{3}$．

(Ⅱ)由于$\{a_{2n-1}\}$是递增数列，因而$a_{2n+1}-a_{2n-1}>0$，于是

$$(a_{2n+1}-a_{2n})+(a_{2n}-a_{2n-1})>0. \qquad ①$$

但$\frac{1}{2^{2n}}<\frac{1}{2^{2n-1}}$，所以

$$|a_{2n+1}-a_{2n}|<|a_{2n}-a_{2n-1}|. \qquad ②$$

由①，②知，$a_{2n}-a_{2n-1}>0$，因此

$$a_{2n}-a_{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{(-1)^{2n}}{2^{2n-1}}. \qquad ③$$

因为$\{a_{2n}\}$是递减数列，同理可得，$a_{2n+1}-a_{2n}<0$，故

$$a_{2n+1}-a_{2n}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n}}. \qquad ④$$

由③，④即知，$a_{n+1}-a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$．

于是

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

21．(本小题满分13分)

如图7，O为坐标原点，椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$e_1$；双曲线$C_2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点分别为$F_3$，$F_4$，离心率为$e_2$．已知$e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$．

(Ⅰ)求C_1，C_2的方程；

(Ⅱ)过F_1作C_1的不垂直于y轴的弦AB，M为AB的中点．当直线OM与C_2交于P，Q两点时，求四边形$APBQ$面积的最小值．

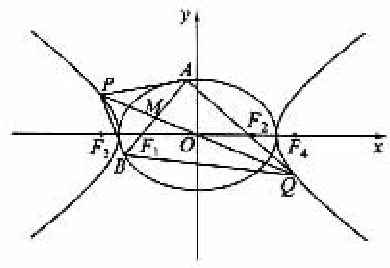
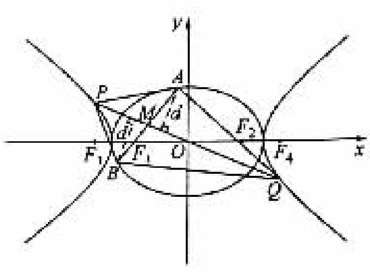


图 7

解 (Ⅰ)因为$e_1e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$a^4-b^4=\frac{3}{4}a^4$，因此$a^2=2b^2$，从而$F_2(b,0)$，$F_4(\sqrt{3}b,0)$，于是$\sqrt{3}b-b=|F_2F_4|=\sqrt{3}-1$，所以$b=1$，$a^2=2$．故$C_1$，$C_2$的方程分别为

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1,\quad \frac{x^2}{2}-y^2=1.$$



图(c)

(Ⅱ)因AB不垂直于y轴，且过点$F_1(-1,0)$，故可设直线AB的方程为

$$x=my-1.$$

由$\begin{cases} x=my-1, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得

$$(m^2+2)y^2-2my-1=0.$$

易知此方程的判别式大于0．设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则y_1，y_2是上述方程的两个实根，所以

$$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2},\quad y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}.$$

因此$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\frac{-4}{m^2+2}$，于是$AB$的中点为$M(\frac{-2}{m^2+2},\frac{m}{m^2+2})$，故直线$PQ$的斜率为$-\frac{m}{2}$，$PQ$的方程为$y=-\frac{m}{2}x$，即$mx+2y=0$．

由$\begin{cases} y=-\frac{m}{2}x, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ 得$(2-m^2)x^2=4$，所以$2-m^2>0$，且$x^2=\frac{4}{2-m^2}$，$y^2=\frac{m^2}{2-m^2}$，从而$|PQ|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{\frac{m^2+4}{2-m^2}}$．

设点A到直线PQ的距离为d，则点B到直线PQ的距离也为d，所以

$$2d=\frac{|mx_1+2y_1|+|mx_2+2y_2|}{\sqrt{m^2+4}}.$$

因为点A，B在直线$mx+2y=0$的异侧，所以$(mx_1+2y_1)(mx_2+2y_2)<0$，于是

$$|mx_1+2y_1|+|mx_2+2y_2|=|mx_1+2y_1-mx_2-2y_2|.$$

从而

$$2d=\frac{(m^2+2)|y_1-y_2|}{\sqrt{m^2+4}}.$$

又因为$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+m^2}}{m^2+2}$，所以

$$2d=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{m^2+4}}.$$

故四边形$APBQ$的面积

$$S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot 2d=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2-m^2}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1+\frac{3}{2-m^2}}.$$

而$0<2-m^2\leqslant 2$，故当$m=0$时，S取得最小值2．

综上所述，四边形$APBQ$面积的最小值为2．

22．(本小题满分13分)

已知常数$a>0$，函数$f(x)=\ln(1+ax)-\frac{2x}{x+2}$．

(Ⅰ)讨论$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的单调性；

(Ⅱ)若$f(x)$存在两个极值点x_1，x_2，且$f(x_1)+f(x_2)>0$，求a的取值范围．

解 (Ⅰ)$f'(x)=\frac{a}{1+ax}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{ax^2-4(a-1)}{(1+ax)(x+2)^2}$． (*)

当$a\geqslant 1$时，$f'(x)>0$，此时，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增．

当$0<a<1$时，由$f'(x)=0$得$x_1=2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$（$x_2=-2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$舍去）．

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$．

故$f(x)$在区间$(0,x_1)$上单调递减，在区间$(x_1,+\infty)$上单调递增．

综上所述

当$a\geqslant 1$时，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

当$0<a<1$时，$f(x)$在区间$(0,2\sqrt{\frac{1-a}{a}})$上单调递减，在区间$(2\sqrt{\frac{1-a}{a}},+\infty)$上单调递增．

(Ⅱ)由(*)式知，当$a\geqslant 1$时，$f'(x)\geqslant 0$，此时$f(x)$不存在极值点．因而要使得$f(x)$有两个极值点，必有$0<a<1$．又$f(x)$的极值点只可能是$x_1=2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$和$x_2=-2\sqrt{\frac{1-a}{a}}$，且由$f(x)$的定义可知，$x>-\frac{1}{a}$且$x\neq-2$，所以$-2\sqrt{\frac{1-a}{a}}>-\frac{1}{a}$，$-2\sqrt{\frac{1-a}{a}}\neq-2$，解得$a\neq\frac{1}{2}$．此时，由(*)式易知，$x_1$，$x_2$分别是$f(x)$的极小值点和极大值点．而