得到的最大球的半径等于

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　【B】

8. 某市生产总值连续两年持续增加．第一年的增长率为 p，第二年的增长率为 q，则该市这两年生产总值的年平均增长率为

A. $\frac{p+q}{2}$　　B. $\frac{(p+1)(q+1)-1}{2}$

C. $\sqrt{pq}$　　D. $\sqrt{(p+1)(q+1)}-1$　　【D】

9. 已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$，且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)\mathrm{d}x=0$，则函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是

A. $x=\frac{5\pi}{6}$　　B. $x=\frac{7\pi}{12}$　　C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{\pi}{6}$　　【A】

10. 已知函数 $f(x)=x^2+e^x-\frac{1}{2}(x<0)$ 与 $g(x)=x^2+\ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,\frac{1}{\sqrt{e}})$　　B. $(-\infty,\sqrt{e})$　　C. $(-\frac{1}{\sqrt{e}},\sqrt{e})$　　D. $(-\sqrt{e},\frac{1}{\sqrt{e}})$　　【B】

二、填空题：本大题共6小题，考生作答5小题，每小题5分，共25分．

（一）选做题（请考生在第11，12，13三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题记分）

11. 在平面直角坐标系中，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 $C:\begin{cases}x=2+\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$．以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，则直线 l 的极坐标方程是 $\underline{\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1}$．

12. 如图3，已知 AB，BC 是⊙O 的两条弦，$AO\perp BC$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{2}$，则⊙O 的半径等于 $\underline{\frac{3}{2}}$．

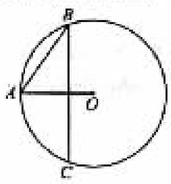


图 3

13. 若关于 x 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\{x|-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\}$，则 $a=\underline{-3}$．

（二）必做题（14～16题）

14. 若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}y\le x,\\ x+y\le 4,\\ y\ge k,\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 -6，则 $k=\underline{-2}$．

15. 如图4，正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 a，b（$a<b$），原点 O 为 AD 的中点，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 经过 C，F 两点，则 $\frac{b}{a}=\underline{1+\sqrt{2}}$．

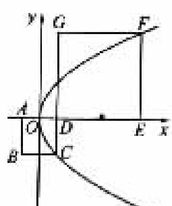


图 4

16. 在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(-1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$C(3,0)$，动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}|=1$，则 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}|$ 的最大值是 $\underline{1+\sqrt{7}}$．

三、解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分12分）

某企业有甲、乙两个研发小组，他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$，现安排甲组研发新产品 A，乙组研发新产品 B．设甲、乙两组的研发相互独立．

（Ⅰ）求至少有一种新产品研发成功的概率；

（Ⅱ）若新产品 A 研发成功，预计企业可获利润120万元；若新产品 B 研发成功，预计企业可获利润100万元．求该企业可获利润的分布列和数学期望．

解　记 $E=\{$甲组研发新产品成功$\}$，$F=\{$乙组研发新产品成功$\}$．由题设知

$$P(E)=\frac{2}{3},\ P(\overline{E})=\frac{1}{3},\ P(F)=\frac{3}{5},\ P(\overline{F})=\frac{2}{5}.$$

且事件 E 与 F，E 与 $\overline{F}$，$\overline{E}$ 与 F，$\overline{E}$ 与 $\overline{F}$ 都相互独立．

（Ⅰ）记 $H=\{$至少有一种新产品研发成功$\}$，则 $\overline{H}=\overline{E}\,\overline{F}$，于是

$$P(\overline{H})=P(\overline{E})P(\overline{F})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15},$$

故所求的概率为

$$P(H)=1-P(\overline{H})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

（Ⅱ）设企业可获利润为 X（万元），则 X 的可能取值为0，100，120，220．因

$$P(X=0)=P(\overline{E}\,\overline{F})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15},\quad P(X=100)=P(\overline{E}F)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{15},$$

$$P(X=120)=P(E\overline{F})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15},\quad P(X=220)=P(EF)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15},$$

故所求的分布列为

X	0	100	120	220
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$

数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{2}{15}+100\times\frac{3}{15}+120\times\frac{4}{15}+220\times\frac{6}{15}$$

$$=\frac{300+480+1320}{15}=\frac{2100}{15}=140.$$

18.（本小题满分12分）

如图5，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$CD=2$，$AC=\sqrt{7}$．

（Ⅰ）求 $\cos\angle CAD$ 的值；

（Ⅱ）若 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，$\sin\angle CBA=\frac{\sqrt{21}}{6}$，求 BC 的长．

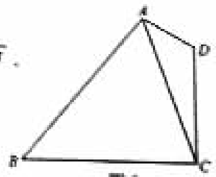


图 5

解　（Ⅰ）如图5，在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}.$$

故由题设知，$\cos\angle CAD=\frac{7+1-4}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$．

（Ⅱ）如图5，设 $\angle BAC=\alpha$，则 $\alpha=\angle BAD-\angle CAD$．

因为 $\cos\angle CAD=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，所以

$$\sin\angle CAD=\sqrt{1-\cos^2\angle CAD}=\sqrt{1-(\frac{2\sqrt{7}}{7})^2}=\frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{7}}{14})^2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

于是

$$\sin\alpha=\sin(\angle BAD-\angle CAD)$$
$$=\sin\angle BAD\cos\angle CAD-\cos\angle BAD\sin\angle CAD$$
$$=\frac{3\sqrt{21}}{14}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}-(-\frac{\sqrt{7}}{14})\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle CBA}$，故

$$BC=\frac{AC\cdot\sin\alpha}{\sin\angle CBA}=\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{6}}=3.$$

19.（本小题满分12分）

如图6，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等，$AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形．

（Ⅰ）证明：$O_1O\perp$ 底面 $ABCD$；

（Ⅱ）若 $\angle CBA=60°$，求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值．

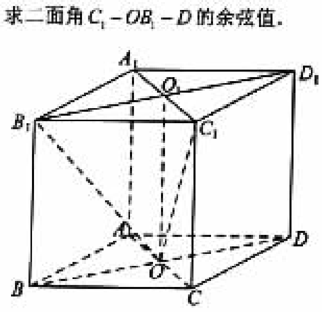


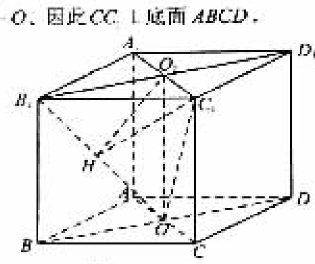
图 6

解　（Ⅰ）如图（a），因为四边形 ACC_1A_1 为矩形，所以 $CC_1\perp AC$．同理 $DD_1\perp BD$．因为 $CC_1/\!/DD_1$，所以 $CC_1\perp BD$．而 $AC\cap BD=O$，因此 $CC_1\perp$ 底面 $ABCD$．

由题设知，$O_1O/\!/C_1C$．故 $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$．

（Ⅱ）解法1　如图（a），过 O_1 作 $O_1H\perp OB_1$ 于 H，连接 HC_1．

由（Ⅰ）知，$O_1O\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $O_1O\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$，于是 $O_1O\perp A_1C_1$．



图（a）

又因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等，所以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形，因此 $A_1C_1\perp B_1D_1$，从而 $A_1C_1\perp$ 平面 BDD_1B_1，所以 $A_1C_1\perp OB_1$，于是 $OB_1\perp$ 平面 O_1HC_1，进而 $OB_1\perp C_1H$．故 $\angle C_1HO_1$ 是二面角 C_1-OB_1-D 的平面角．

不妨设 $AB=2$．因为 $\angle CBA=60°$，所以 $OB=\sqrt{3}$，$OC=1$，$OB_1=\sqrt{7}$．

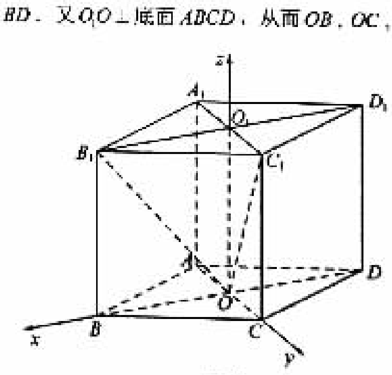
在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1B_1$ 中，易知 $O_1H=\frac{OO_1\cdot O_1B_1}{OB_1}=2\sqrt{\frac{3}{7}}$．而 $O_1C_1=1$，于是

$$C_1H=\sqrt{O_1C_1^2+O_1H^2}=\sqrt{1+\frac{12}{7}}=\sqrt{\frac{19}{7}}.$$

故 $\cos\angle C_1HO_1=\frac{O_1H}{C_1H}=\frac{2\sqrt{\frac{3}{7}}}{\sqrt{\frac{19}{7}}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$．

即二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{57}}{19}$．

解法2　因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等，所以四边形 $ABCD$ 是菱形，因此 $AC\perp BD$．又 $O_1O\perp$ 底面 $ABCD$，从而 OB，OC，OO_1 两两垂直．



图（b）