（Ⅱ）由题设知，$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，于是由（Ⅰ）知，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{21}{49}}=\frac{2\sqrt7}{7}.$$

而$\angle AEB=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，所以

$$\cos\angle AEB=\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt7}{7}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt7}{14}.$$

在$Rt\triangle EAB$中，$\cos\angle AEB=\frac{EA}{BE}=\frac{2}{BE}$，故

$$BE=\frac{2}{\cos\angle AEB}=\frac{2}{\frac{\sqrt7}{14}}=4\sqrt7.$$

20.（本小题满分13分）

如图5，O为坐标原点，双曲线$C_1:\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$和椭圆$C_2:\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{x^2}{b_2^2}=1$ $(a_2>b_2>0)$均过点$P(\frac{2\sqrt3}{3},1)$，且以C_1的两个顶点和C_2的两个焦点为顶点的四边形是面积为2的正方形.

（Ⅰ）求C_1，C_2的方程；

（Ⅱ）是否存在直线l，使得l与C_1交于A、B两点，与C_2只有一个公共点，且$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$？证明你的结论.

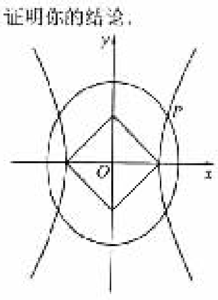

图5

解 （Ⅰ）设C_2的焦距为$2c_2$，由题意知，$2c_2=2$，$2a_1=2$. 从而$a_1=1$，$c_2=1$. 因为点$P(\frac{2\sqrt3}{3},1)$在双曲线$x^2-\frac{y^2}{b_1^2}=1$上，所以$(\frac{2\sqrt3}{3})^2-\frac{1}{b_1^2}=1$. 故$b_1^2=3$.

由椭圆的定义知

$$2a_2=\sqrt{(\frac{2\sqrt3}{3})^2+(1-1)^2}+\sqrt{(\frac{2\sqrt3}{3})^2+(1+1)^2}=2\sqrt3,$$

于是$a_2=\sqrt3$，$b_2^2=a_2^2-c_2^2=2$. 故C_1，C_2的方程分别为

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1,\quad \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1.$$

（Ⅱ）不存在符合题设条件的直线.

（ⅰ）若直线l垂直于x轴，因为l与C_2只有一个公共点，所以直线l的方程为$x=\sqrt2$或$x=-\sqrt2$.

当$x=\sqrt2$时，易知$A(\sqrt2,\sqrt3)$，$B(\sqrt2,-\sqrt3)$，所以

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=2\sqrt2,\ |\overrightarrow{AB}|=2\sqrt3.$$

此时，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

当$x=-\sqrt2$时，同理可知，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

（ⅱ）若直线l不垂直于x轴，设l的方程为$y=kx+m$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$得

$$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0.$$

当l与C_1相交于A、B两点时，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则x_1，x_2是上述方程的两个实根，从而

$$x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2},\quad x_1x_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}.$$

于是

$$y_1y_2=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}.$$

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{2}=1\end{cases}$得

$$(2k^2+3)x^2+4kmx+2m^2-6=0.$$

因为直线l与C_2只有一个公共点，所以上述方程的判别式

$$\Delta=16k^2m^2-8(2k^2+3)(m^2-3)=0.$$

化简，得$2k^2=m^2-3$. 因此

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}+\frac{3k^2-3m^2}{k^2-3}=\frac{-k^2-3}{k^2-3}\neq0,$$

于是

$$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB},$$

即$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2\neq|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2$，故$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{AB}|$.

综合（ⅰ），（ⅱ）可知，不存在符合题设条件的直线.

21.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=x\cos x-\sin x+1(x>0)$.

（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）记x_i为$f(x)$的从小到大的第$i(i\in N^*)$个零点，证明：对一切$n\in N^*$，有

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{2}{3}.$$

解 （Ⅰ）$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

令$f'(x)=0$，得$x=k\pi(k\in N^*)$.

当$x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in N)$时，$\sin x>0$，此时$f'(x)<0$；

当$x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in N)$时，$\sin x<0$，此时$f'(x)>0$.

故$f(x)$的单调递减区间为$(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in N)$，单调递增区间为$((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)(k\in N)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$在区间$(0,\pi)$上单调递减. 又$f(\frac{\pi}{2})=0$，故$x_1=\frac{\pi}{2}$.

当$n\in N^*$时，因为

$$f(n\pi)f((n+1)\pi)=[(-1)^n n\pi+1][(-1)^{n+1}(n+1)\pi+1]<0,$$

且函数$f(x)$的图象是连续不断的，所以$f(x)$在区间$(n\pi,(n+1)\pi)$内至少存在一个零点. 又$f(x)$在区间$(n\pi,(n+1)\pi)$上是单调的，故

$$n\pi<x_{n+1}<(n+1)\pi.$$

因此

当$n=1$时，$\frac{1}{x_1^2}=\frac{4}{\pi^2}<\frac{2}{3}$；

当$n=2$时，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}<\frac{1}{\pi^2}(4+1)<\frac{2}{3}$；

当$n\geqslant3$时

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{\pi^2}\left[4+1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right]$$
$$<\frac{1}{\pi^2}\left[5+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}\right]$$
$$<\frac{1}{\pi^2}\left[5+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1})\right]$$
$$=\frac{1}{\pi^2}(6-\frac{1}{n-1})<\frac{6}{\pi^2}<\frac{2}{3}.$$

综上所述，对一切$n\in N^*$，$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<\frac{2}{3}$.

理科综合能力测试

可能用到的相对原子质量：H 1 C 12 N 14 O 16 F 19 Al 27 P 31 S 32 Ca 40 Fe 56 Cu 64 Br 80 Ag 108

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共13小题，每小题6分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 关于细胞膜结构和功能的叙述，错误的是

A. 脂质和蛋白质是组成细胞膜的主要物质

B. 当细胞衰老时，其细胞膜的通透性会发生改变

C. 甘油是极性分子，所以不能以自由扩散的方式透过细胞膜

D. 细胞产生的激素与靶细胞膜上相应受体的结合可实现细胞间的信息传递 【C】

2. 正常生长的绿藻，照光培养一段时间后，用黑布迅速将培养瓶罩上，此后绿藻细胞的叶绿体内不可能发生的现象是

A. O_2的产生停止　　B. CO_2的固定加快

C. ATP / ADP 比值下降　　D. NADPH / $NADP^+$ 比值下降 【B】

3. 内环境稳态是维持机体正常生命活动的必要条件，下列叙述错误的是

A. 内环境保持相对稳定有利于机体适应外界环境的变化

B. 内环境稳态有利于新陈代谢过程中酶促反应的正常进行

C. 维持内环境中Na^+、K^+浓度的相对稳定有利于维持神经细胞的正常兴奋性

D. 内环境中发生的丙酮酸氧化分解给细胞提供能量，有利于生命活动的进行【D】

4. 下列关于植物细胞质壁分离实验的叙述，错误的是

A. 与白色花瓣相比，采用红色花瓣有利于实验现象的观察

B. 用黑藻叶片进行实验时，叶绿体的存在会干扰实验现象的观察

C. 用紫色洋葱鳞片叶外表皮不同部位观察到的质壁分离程度可能不同

D. 紫色洋葱鳞片叶外表皮细胞的液泡中有色素，有利于实验现象的观察 【B】

5. 下图为某种单基因常染色体隐性遗传病的系谱图（深色代表的个体是该遗传病患者，其余为表现型正常个体）。近亲结婚时该遗传病发病率较高，假定图中第Ⅳ代的两个个体婚配生出一个患该遗传病子代的概率是1/48，那么，得出此概率值需要的限定条件是