（Ⅰ）确定 x,y 的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；

（Ⅱ）求一位顾客一次购物的结算时间不超过2分钟的概率.（将频率视为概率）

解 （Ⅰ）由已知得 $25+y+10=55$，$x+30=45$，所以 $x=15$，$y=20$.

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体，所收集的100位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量为100的简单随机样本，顾客一次购物的结算时间的平均值可用样本平均数估计，其估计值为

$$\frac{1\times15+1.5\times30+2\times25+2.5\times20+3\times10}{100}=1.9\text{（分钟）}.$$

（Ⅱ）记 A 为事件"一位顾客一次购物的结算时间不超过2分钟"，A_1，A_2，A_3 分别表示事件"该顾客一次购物的结算时间为1分钟"，"该顾客一次购物的结算时间为1.5分钟"，"该顾客一次购物的结算时间为2分钟"，将频率视为概率得

$$P(A_1)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}，P(A_2)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}，P(A_3)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}.$$

因为 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1，A_2，A_3 是互斥事件，所以

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=\frac{3}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{7}{10}.$$

故一位顾客一次购物的结算时间不超过2分钟的概率为 $\frac{7}{10}$.

18.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R},\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图5所示.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）求函数 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{12})-f(x+\frac{\pi}{12})$ 的单调递增区间.

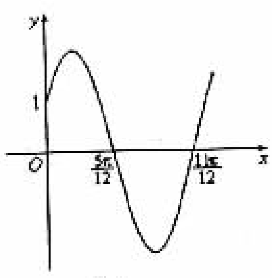


图5

解 （Ⅰ）由题设图象知，周期 $T=2(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12})=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

因为点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 在函数图象上，所以 $A\sin(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi)=0$，即 $\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=0$.

又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{4\pi}{3}$. 从而 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

又点 $(0,1)$ 在函数图象上，所以 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$，得 $A=2$.

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

（Ⅱ）$g(x)=2\sin[2(x-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{6}]-2\sin[2(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{6}]$

$$=2\sin 2x-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$
$$=2\sin 2x-2(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x)$$
$$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$$
$$=2\sin(2x-\frac{\pi}{3}).$$

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi-\frac{5\pi}{12}]$，$k\in\mathbf{Z}$.

19.（本小题满分12分）

如图6，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD\parallel BC$，$AC\perp BD$.

（Ⅰ）证明：$BD\perp PC$；

（Ⅱ）若 $AD=4$，$BC=2$，直线 PD 与平面 PAC 所成的角为30°，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

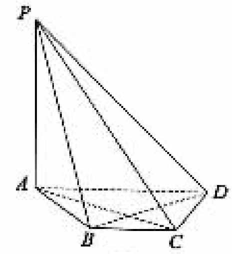


图6

解 （Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$.

又 $AC\perp BD$，PA，AC 是平面 PAC 内的两条相交直线，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

而 $PC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PC$.

（Ⅱ）设 AC 和 BD 相交于点 O，连结 PO，由（Ⅰ）知，$BD\perp$ 平面 PAC，所以 $\angle DPO$ 是直线 PD 和平面 PAC 所成的角. 从而 $\angle DPO=30°$.

由 $BD\perp$ 平面 PAC，$PO\subset$ 平面 PAC 知，$BD\perp PO$. 在 Rt$\triangle POD$ 中，由 $\angle DPO=30°$

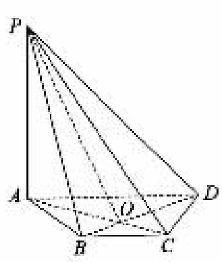
得 $PD=2OD$.

因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AC\perp BD$，所以 $\triangle AOD$，$\triangle BOC$ 均为等腰直角三角形. 从而梯形 $ABCD$ 的高为 $\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times(4+2)=3$，于是梯形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(4+2)\times3=9$.

在等腰直角三角形 AOD 中，$OD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=2\sqrt{2}$，

所以

$$PD=2OD=4\sqrt{2}，PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=4.$$



故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}\times S\times PA=\frac{1}{3}\times9\times4=12.$$

20.（本小题满分13分）

某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金2000万元，将其投入生产，到当年年底资金增长了50%. 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始，每年年底上缴资金 d 万元，并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.

（Ⅰ）用 d 表示 a_1,a_2，并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式；

（Ⅱ）若公司希望经过 $m(m\geqslant3)$ 年使企业的剩余资金为4000万元，试确定企业每年上缴资金 d 的值（用 m 表示）.

解 （Ⅰ）由题意得 $a_1=2000(1+50\%)-d=3000-d$，

$$a_2=a_1(1+50\%)-d=\frac{3}{2}a_1-d=4500-\frac{5}{2}d.$$
$$a_{n+1}=a_n(1+50\%)-d=\frac{3}{2}a_n-d.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}-d$

$$=\frac{3}{2}(\frac{3}{2}a_{n-2}-d)-d$$
$$=(\frac{3}{2})^2a_{n-2}-\frac{3}{2}d-d$$
$$=\cdots$$
$$=(\frac{3}{2})^{n-1}a_1-d[1+\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2+\cdots+(\frac{3}{2})^{n-2}].$$

整理得
$$a_n=(\frac{3}{2})^{n-1}(3000-d)-2d[(\frac{3}{2})^{n-1}-1]$$
$$=(\frac{3}{2})^{n-1}(3000-3d)+2d.$$

由题意，$a_m=4000$，即 $(\frac{3}{2})^{m-1}(3000-3d)+2d=4000$.

解得 $d=\dfrac{[(\frac{3}{2})^m-2]\times1000}{(\frac{3}{2})^m-1}=\dfrac{1000(3^m-2^{m+1})}{3^m-2^m}$.

故该企业每年上缴资金 d 的值为 $\dfrac{1000(3^m-2^{m+1})}{3^m-2^m}$ 时，经过 $m(m\geqslant3)$ 年企业的剩余资金为4000万元.

21.（本小题满分13分）

在直角坐标系 xOy 中，已知中心在原点，离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆 E 的一个焦点为圆 $C:x^2+y^2-4x+2=0$ 的圆心.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 P 是椭圆 E 上一点，过 P 作两条斜率之积为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l_1，l_2. 当直线 l_1，l_2 都与圆 C 相切时，求 P 的坐标.

解 （Ⅰ）由 $x^2+y^2-4x+2=0$ 得 $(x-2)^2+y^2=2$，故圆 C 的圆心为点 $(2,0)$.

从而可设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其焦距为 $2c$. 由题设知 $c=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 所以 $a=2c=4$，$b^2=a^2-c^2=12$. 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（Ⅱ）设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，l_1，l_2 的斜率分别为 k_1,k_2. 则 l_1，l_2 的方程分别为 $l_1:y-y_0=k_1(x-x_0)$，$l_2:y-y_0=k_2(x-x_0)$，且 $k_1k_2=\frac{1}{2}$.

由 l_1 与圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$ 相切得

$$\frac{|2k_1+y_0-k_1x_0|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{2},$$

即 $[(2-x_0)^2-2]k_1^2+2(2-x_0)y_0k_1+y_0^2-2=0$.

同理可得 $[(2-x_0)^2-2]k_2^2+2(2-x_0)y_0k_2+y_0^2-2=0$.

从而 k_1,k_2 是方程 $[(2-x_0)^2-2]k^2+2(2-x_0)y_0k+y_0^2-2=0$ 的两个实根，于是

$$\begin{cases}(2-x_0)^2-2\neq0,\\ \Delta=8[(2-x_0)^2+y_0^2-2]>0,\end{cases}\qquad ①$$