21.（本小题满分13分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2:(x-5)^2+y^2=9$ 外，且对 C_1 上任意一点 M，M 到直线 $x=-2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值．

（Ⅰ）求曲线 C_1 的方程；

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq\pm3)$ 为圆 C_2 外一点，过 P 作圆 C_2 的两条切线，分别与曲线 C_1 相交于点 A，B 和 C，D．证明：当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时，四点 A，B，C，D 的纵坐标之积为定值．

解（Ⅰ）解法1 设 M 的坐标为 (x,y)，由已知得 $|x+2|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}-3$．

易知圆 C_2 上的点位于直线 $x=-2$ 的右侧，于是 $x+2>0$，所以

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=x+5.$$

化简得曲线 C_1 的方程为 $y^2=20x$．

解法2 由题设知，曲线 C_1 上任意一点 M 到圆心 $C_2(5,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-5$ 的距离．因此，曲线 C_1 是以 $(5,0)$ 为焦点，直线 $x=-5$ 为准线的抛物线．故其方程为 $y^2=20x$．

（Ⅱ）当点 P 在直线 $x=-4$ 上运动时，P 的坐标为 $(-4,y_0)$，又 $y_0\neq\pm3$，则过 P 且与圆 C_2 相切的直线的斜率 k 存在且不为0，每条切线都与抛物线有两个交点，切线方程为 $y-y_0=k(x+4)$，即 $kx-y+y_0+4k=0$．于是

$$\frac{|5k+y_0+4k|}{\sqrt{k^2+1}}=3.$$

整理得

$$72k^2+18y_0k+y_0^2-9=0. \qquad ①$$

设过 P 所作的两条切线 PA，PC 的斜率分别为 k_1，k_2，则 k_1，k_2 是方程①的两个实根．故

$$k_1+k_2=-\frac{18y_0}{72}=-\frac{y_0}{4}. \qquad ②$$

由 $\begin{cases}k_1x-y+y_0+4k_1=0,\\ y^2=20x\end{cases}$ 得

$$k_1y^2-20y+20(y_0+4k_1)=0. \qquad ③$$

设四点 A，B，C，D 的纵坐标分别为 y_1，y_2，y_3，y_4，则 y_1，y_2 是方程③的两个实根，所以

$$y_1y_2=\frac{20(y_0+4k_1)}{k_1}. \qquad ④$$

同理可得

$$y_3y_4=\frac{20(y_0+4k_2)}{k_2}. \qquad ⑤$$

于是由②，④，⑤三式得

$$y_1y_2y_3y_4=\frac{400(y_0+4k_1)(y_0+4k_2)}{k_1k_2}$$

$$=\frac{400[y_0^2+4(k_1+k_2)y_0+16k_1k_2]}{k_1k_2}$$

$$=\frac{400(y_0^2-y_0^2+16k_1k_2)}{k_1k_2}=6400.$$

所以，当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时，四点 A，B，C，D 的纵坐标之积为定值6400．

22.（本小题满分13分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$，其中 $a\neq0$．

（Ⅰ）若对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq1$ 恒成立，求 a 的取值集合；

（Ⅱ）在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))(x_1<x_2)$，记直线 AB 的斜率为 k．问：是否存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)>k$ 成立？若存在，求 x_0 的取值范围；若不存在，请说明理由．

解（Ⅰ）若 $a<0$，则对一切 $x>0$，$f(x)=e^{ax}-x<1$，这与题设矛盾．又 $a\neq0$，故 $a>0$．

而 $f'(x)=ae^{ax}-1$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$．

当 $x<\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．故当 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$．

于是对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq1$ 恒成立，当且仅当

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\geq1. \qquad ①$$

令 $g(t)=t-t\ln t$，则 $g'(t)=-\ln t$．

当 $0<t<1$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减．

故当 $t=1$ 时，$g(t)$ 取最大值 $g(1)=1$．因此，当且仅当 $\frac{1}{a}=1$，即 $a=1$ 时，①式成立．

综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$．

（Ⅱ）由题意知，$k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{x_2-x_1}-1$．

令 $\varphi(x)=f'(x)-k=ae^{ax}-\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{x_2-x_1}$，则

$$\varphi(x_1)=-\frac{e^{ax_1}}{x_2-x_1}[e^{a(x_2-x_1)}-a(x_2-x_1)-1],$$

$$\varphi(x_2)=\frac{e^{ax_2}}{x_2-x_1}[e^{a(x_1-x_2)}-a(x_1-x_2)-1].$$

令 $F(t)=e^t-t-1$，则 $F'(t)=e^t-1$．

当 $t<0$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减；当 $t>0$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增．

故当 $t\neq0$ 时，$F(t)>F(0)=0$，即 $e^t-t-1>0$．

从而 $e^{a(x_2-x_1)}-a(x_2-x_1)-1>0$，$e^{a(x_1-x_2)}-a(x_1-x_2)-1>0$，又 $\frac{e^{ax_1}}{x_2-x_1}>0$，$\frac{e^{ax_2}}{x_2-x_1}>0$，所以 $\varphi(x_1)<0$，$\varphi(x_2)>0$．

因为函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，所以存在 $c\in(x_1,x_2)$，使得 $\varphi(c)=0$．又 $\varphi'(x)=a^2e^{ax}>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，故这样的 c 是唯一的，且 $c=\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)}$．故当且仅当 $x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)},x_2)$ 时，

$$f'(x)>k.$$

综上所述，存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)>k$ 成立，且 x_0 的取值范围为

$$(\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)},x_2).$$

数　　学（文史类）

一、选择题：本大题共9小题，每小题5分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{x|x^2=x\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{-1,0,1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{0\}$　　【B】

2．复数 $z=i(i+1)$（i 为虚数单位）的共轭复数是

A．$-1-i$　　B．$-1+i$　　C．$1-i$　　D．$1+i$　　【A】

3．命题"若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha=1$"的逆否命题是

A．若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha\neq1$　　B．若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\alpha\neq1$

C．若 $\tan\alpha\neq1$，则 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　　D．若 $\tan\alpha\neq1$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$　　【C】

4．某几何体的正视图和侧视图均如图1所示，则该几何体的俯视图不可能是

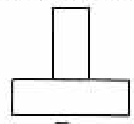
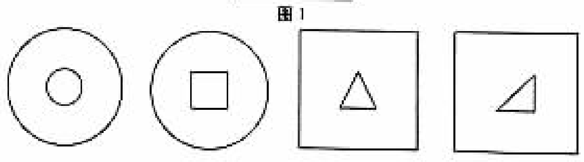


图1



A　　B　　C　　D　　【C】

5．设某大学的女生体重 y（单位：kg）与身高 x（单位：cm）具有线性相关关系，根据一组样本数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$，则下列结论中不正确的是

A．y 与 x 具有正的线性相关关系

B．回归直线过样本点的中心 $(\bar{x},\bar{y})$

C．若该大学某女生身高增加1 cm，则其体重约增加0.85 kg

D．若该大学某女生身高为170 cm，则可断定其体重必为58.79 kg　　【D】