由（Ⅰ）知，$\overrightarrow{CD}=(-4,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,0,-h)$，又$\overrightarrow{PB}=(4,0,-h)$，故

$$\left|\frac{-16+0+0}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{16+h^2}}\right|=\left|\frac{0+0+h^2}{h\cdot\sqrt{16+h^2}}\right|.$$

解得$h=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

又梯形$ABCD$的面积为$S=\frac{1}{2}\times(5+3)\times4=16$，所以四棱锥$P-ABCD$的体积为

$$V=\frac{1}{3}\times S\times PA=\frac{1}{3}\times16\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{128\sqrt{5}}{15}.$$

19.（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记$A(n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$B(n)=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}$，$C(n)=a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}$，$n=1,2,\cdots$.

（Ⅰ）若$a_1=1$，$a_2=5$，且对任意$n\in\mathbf{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$组成等差数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）证明：数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列的充分必要条件是：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为q的等比数列.

解 （Ⅰ）对任意$n\in\mathbf{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$是等差数列，所以

$$B(n)-A(n)=C(n)-B(n),$$

即$a_{n+1}-a_1=a_{n+2}-a_2$，亦即$a_{n+2}-a_{n+1}=a_2-a_1=4$.

故数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为4的等差数列．于是$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$.

（Ⅱ）（1）必要性：若数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，则对任意$n\in\mathbf{N}^*$，有$a_{n+1}=a_nq$．由$a_n>0$知，$A(n),B(n),C(n)$均大于0，于是

$$\frac{B(n)}{A(n)}=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{q(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=q,$$

$$\frac{C(n)}{B(n)}=\frac{a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}=\frac{q(a_2+a_3+\cdots+a_{n+1})}{a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}=q,$$

即$\frac{B(n)}{A(n)}=\frac{C(n)}{B(n)}=q$．所以三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为$q$的等比数列.

（2）充分性：若对任意$n\in\mathbf{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为q的等比数列，则

$$B(n)=qA(n),\quad C(n)=qB(n).$$

于是$C(n)-B(n)=q[B(n)-A(n)]$，得$a_{n+2}-a_2=q(a_{n+1}-a_1)$，即

$$a_{n+2}-qa_{n+1}=a_2-qa_1.$$

由$n=1$有$B(1)=qA(1)$，即$a_2=qa_1$，从而$a_{n+2}-qa_{n+1}=0$.

因为$a_n>0$，所以$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_2}{a_1}=q$．故数列$\{a_n\}$是首项为$a_1$，公比为$q$的等比数列.

综上所述，数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列的充分必要条件是：对任意$n\in\mathbf{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为q的等比数列.

20.（本小题满分13分）

某企业接到生产3000台某产品的A，B，C三种部件的订单，每台产品需要这三种部件的数量分别为2，2，1（单位：件）．已知每个工人每天可生产A部件6件，或B部件3件，或C部件2件．该企业计划安排200名工人分成三组分别生产这三种部件，生产B部件的人数与生产A部件的人数成正比，比例系数为k（k为正整数）.

（Ⅰ）设生产A部件的人数为x，分别写出完成A，B，C三种部件生产需要的时间；

（Ⅱ）假设这三种部件的生产同时开工，试确定正整数k的值，使完成订单任务的时间最短，并给出时间最短时具体的人数分组方案.

解 （Ⅰ）设完成A，B，C三种部件的生产任务需要的时间（单位：天）分别为$T_1(x),T_2(x),T_3(x)$，由题设有

$$T_1(x)=\frac{2\times3000}{6x}=\frac{1000}{x},\ T_2(x)=\frac{2000}{kx},\ T_3(x)=\frac{1500}{200-(1+k)x},$$

其中$x,kx,200-(1+k)x$均为1到200之间的正整数.

（Ⅱ）完成订单任务的时间为$f(x)=\max\{T_1(x),T_2(x),T_3(x)\}$，其定义域为$\{x\mid 0<x<\frac{200}{1+k},x\in\mathbf{N}^*\}$．易知，$T_1(x),T_2(x)$为减函数，$T_3(x)$为增函数．注意到$T_2(x)=\frac{2}{k}T_1(x)$，于是

（1）当$k=2$时，$T_1(x)=T_2(x)$，此时

$$f(x)=\max\{T_1(x),T_3(x)\}=\max\left\{\frac{1000}{x},\frac{1500}{200-3x}\right\}.$$

由函数$T_1(x)$，$T_3(x)$的单调性知，当$\frac{1000}{x}=\frac{1500}{200-3x}$时$f(x)$取得最小值，解得$x=\frac{400}{9}$．由于$44<\frac{400}{9}<45$，而$f(44)=T_1(44)=\frac{250}{11}$，$f(45)=T_3(45)=\frac{300}{13}$，$f(44)<f(45)$．故当$x=44$时完成订单任务的时间最短，且最短时间为$f(44)=\frac{250}{11}$.

（2）当$k>2$时，$T_1(x)>T_2(x)$，由于k为正整数，故$k\geqslant3$，此时

$$\frac{1500}{200-(1+k)x}\geqslant\frac{1500}{200-(1+3)x}=\frac{375}{50-x}.$$

记$T(x)=\frac{375}{50-x}$，$\varphi(x)=\max\{T_1(x),T(x)\}$．易知$T(x)$是增函数，则

$$\begin{aligned}f(x)&=\max\{T_1(x),T_3(x)\}\\&\geqslant\max\{T_1(x),T(x)\}\\&=\varphi(x)=\max\left\{\frac{1000}{x},\frac{375}{50-x}\right\}.\end{aligned}$$

由函数$T_1(x)$，$T(x)$的单调性知，当$\frac{1000}{x}=\frac{375}{50-x}$时$\varphi(x)$取最小值，解得$x=\frac{400}{11}$．由于$36<\frac{400}{11}<37$，而$\varphi(36)=T_1(36)=\frac{250}{9}>\frac{250}{11}$，$\varphi(37)=T(37)=\frac{375}{13}>\frac{250}{11}$．此时完成订单任务的最短时间大于$\frac{250}{11}$.

（3）当$k<2$时，$T_1(x)<T_2(x)$，由于k为正整数，故$k=1$，此时

$$f(x)=\max\{T_2(x),T_3(x)\}=\max\left\{\frac{2000}{x},\frac{750}{100-x}\right\}.$$

由函数$T_2(x)$，$T_3(x)$的单调性知，当$\frac{2000}{x}=\frac{750}{100-x}$时$f(x)$取最小值，解得$x=\frac{800}{11}$，类似（1）的讨论，此时完成订单任务的最短时间为$\frac{250}{9}$，大于$\frac{250}{11}$.

综上所述，当$k=2$时，完成订单任务的时间最短，此时，生产A，B，C三种部件的人数分别为44，88，68.