



由(1)知,  $\overrightarrow{CD} = (-4, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{PA} = (0, 0, -h)$ , 又  $\overrightarrow{PB} = (4, 0, -h)$ , 故

$$\left| \frac{-16+0+0}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{16+h^2}} \right| = \left| \frac{0+0+h^2}{h \cdot \sqrt{16+h^2}} \right|$$

解得  $h = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ .

又梯形  $ABCD$  的面积为  $S = \frac{1}{2} \times (3+3) \times 4 = 16$ , 所以四棱锥  $P-ABCD$  的体积为

$$V = \frac{1}{3} \times S \times PA = \frac{1}{3} \times 16 \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{128\sqrt{5}}{15}$$

19. (本小题满分12分)

已知数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 记  $A(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $B(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ ,  $C(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_{4n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

(I) 若  $a_1 = 1, a_2 = 5$ , 且对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成等差数列, 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 证明: 数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列的充分必要条件是: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

解 (I) 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  是等差数列, 所以

$$B(n) - A(n) = C(n) - B(n),$$

即  $a_{n+1} - a_1 = a_{n+2} - a_2$ , 亦即  $a_{n+2} - a_{n+1} = a_2 - a_1 = 4$ .

故数列  $\{a_n\}$  是首项为1, 公差为4的等差数列, 于是  $a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$ .

(II) (1) 必要性: 若数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列, 则对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 有

$a_{n+1} = qa_n$ . 由  $a_n > 0$  知,  $A(n), B(n), C(n)$  均大于0, 于是

$$\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{q(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = q,$$

$$\frac{C(n)}{B(n)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{4n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}} = \frac{q(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}} = q,$$

即  $\frac{B(n)}{A(n)} = \frac{C(n)}{B(n)} = q$ . 所以三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

(2) 充分性: 若对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列, 则

$$B(n) = qA(n), C(n) = qB(n).$$

于是  $C(n) - B(n) = q[B(n) - A(n)]$ , 得  $a_{n+2} - a_2 = q(a_{n+1} - a_1)$ , 即

$$a_{n+2} - qa_{n+1} = a_2 - qa_1.$$

由  $n=1$  有  $B(1) = qA(1)$ , 即  $a_2 = qa_1$ , 从而  $a_{n+2} - qa_{n+1} = 0$ .

因为  $a_n > 0$ , 所以  $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_2}{a_1} = q$ . 故数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.

综上所述, 数列  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列的充分必要条件是: 对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 三个数  $A(n), B(n), C(n)$  组成公比为  $q$  的等比数列.

20. (本小题满分13分)

某企业接到生产3000台某产品的A, B, C三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为2, 2, 1(单位: 件). 已知每个工人每天可生产A部件6件, 或B部件3件, 或C部件2件. 该企业计划安排200名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产B部件的人数与生产A部件的人数成正比, 比例系数为  $k$  ( $k$  为正整数).

(I) 设生产A部件的人数为  $x$ , 分别写出完成A, B, C三种部件生产需要的时间;  
(II) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数  $k$  的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案.

解 (I) 设完成A, B, C三种部件的生产任务需要的时间(单位: 天)分别为  $T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ , 由题设有

$$T_1(x) = \frac{2 \times 3000}{6x} = \frac{1000}{x}, T_2(x) = \frac{2000}{3x}, T_3(x) = \frac{1500}{200 - (1+k)x}$$

其中  $x, kx, 200 - (1+k)x$  均为1到200之间的正整数.

(II) 完成订单任务的时间为  $f(x) = \max\{T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$ , 其定义域为  $\{x | 0 < x < \frac{200}{1+k}, x \in \mathbb{N}^*\}$ . 易知,  $T_1(x), T_2(x)$  为减函数,  $T_3(x)$  为增函数. 注意

到  $T_2(x) = \frac{2}{k} T_1(x)$ , 于是

# 三湘都市报华声在线恭祝全省高考学子心想事成

(1) 当  $k=2$  时,  $T_1(x) = T_2(x)$ , 此时

$$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} = \max\left\{\frac{1000}{x}, \frac{1500}{200-3x}\right\}$$

由函数  $T_1(x), T_3(x)$  的单调性知, 当  $\frac{1000}{x} = \frac{1500}{200-3x}$  时  $f(x)$  取得最小值, 解得  $x = \frac{400}{9}$ . 由于  $44 < \frac{400}{9} < 45$ , 而  $f(44) = T_1(44) = \frac{250}{11}, f(45) = T_3(45) = \frac{300}{13}$ .

$f(44) < f(45)$ . 故当  $x=44$  时完成订单任务的时间最短, 且最短时间为  $f(44) = \frac{250}{11}$ .

(2) 当  $k > 2$  时,  $T_1(x) > T_2(x)$ , 由于  $k$  为正整数, 故  $k \geq 3$ , 此时

$$\frac{1500}{200 - (1+k)x} \geq \frac{1500}{200 - (1+3)x} = \frac{375}{50-x}$$

记  $T(x) = \frac{375}{50-x}$ ,  $\varphi(x) = \max\{T_1(x), T(x)\}$ . 易知  $T(x)$  是增函数, 则

$$f(x) = \max\{T_1(x), T_3(x)\} \geq \max\{T_1(x), T(x)\} = \varphi(x) = \max\left\{\frac{1000}{x}, \frac{375}{50-x}\right\}$$

由函数  $T_1(x), T(x)$  的单调性知, 当  $\frac{1000}{x} = \frac{375}{50-x}$  时  $\varphi(x)$  取最小值, 解得  $x = \frac{400}{11}$ . 由于  $36 < \frac{400}{11} < 37$ , 而  $\varphi(36) = T_1(36) = \frac{250}{9} > \frac{250}{11}$ ,  $\varphi(37) = T(37) = \frac{375}{13} > \frac{250}{11}$ , 此时完成订单任务的最短时间大于  $\frac{250}{11}$ .

(3) 当  $k < 2$  时,  $T_1(x) < T_2(x)$ , 由于  $k$  为正整数, 故  $k=1$ , 此时

$$f(x) = \max\{T_2(x), T_3(x)\} = \max\left\{\frac{2000}{x}, \frac{750}{100-x}\right\}$$

由函数  $T_2(x), T_3(x)$  的单调性知, 当  $\frac{2000}{x} = \frac{750}{100-x}$  时  $f(x)$  取最小值, 解得  $x = \frac{800}{11}$ . 类似(1)的讨论, 此时完成订单任务的最短时间为  $\frac{250}{9}$ , 大于  $\frac{250}{11}$ .

综上所述, 当  $k=2$  时, 完成订单任务的时间最短, 此时, 生产A, B, C三种部件的人数分别为44, 88, 68.

## 宏图三胞 PC MAIL

买电脑 → 宏图三胞

# 暑期 学生电脑 特惠

## 无电脑 不暑假

**超值礼包 全新登场**

- 购华硕 A550 笔记本, 送华硕无线鼠标、华硕无线网卡、华硕无线充电器。
- 购联想 G570 笔记本, 送联想无线鼠标、联想无线网卡、联想无线充电器。
- 购三星 S5578 手机, 送三星蓝牙耳机、三星蓝牙耳机充电器。

**红快新服务产品**

- 单品服务**: 包含安装、APPLE、PC、手机、维修、网络等, 还有上门服务, 费用有惊喜, 更有惊喜。
- 基础套餐**: 包含家庭电脑服务套餐, 安装、维修、保养、数据备份, APPLE 设备维修选 2 项服务。
- 3C 家庭套餐组合**: 包含 4 种 3C 产品, 同时免费赠送 4 项服务。

**最佳“苹果”风, iOS 产品很热门, 快来抢购吧!**

- 苹果 iPad 2 再赠送价值 198 元高端品牌屏保保护膜
- 苹果 iPhone 4S 再赠送价值 98 元高端品牌屏保保护膜

**智能手机, 没有速度怎么玩? 用沃 3G 小心提速!**

- 小天才手机 ONE-PLUS: 双核 4.0 寸大屏, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。
- 中兴 V889D: Android 2.3, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。
- 三星 S6102: 安卓系统, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。
- MOTO XT390: Android 2.3, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。
- 联想 A85: 超薄机身, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。
- 天语手机 W619: 时尚小清新, 赠送 3 个月沃 3G 无线上网卡。

**三星旗舰 Galaxy SIII**: 四核四核直连, 三星无线充电器, 三星蓝牙耳机, 三星蓝牙耳机充电器, 三星蓝牙耳机充电器。

三星 S5578: 全键盘输入, 300 万像素, Android 2.3, 三星蓝牙耳机, 三星蓝牙耳机充电器, 三星蓝牙耳机充电器。

酷派 W706: 1.5 英寸屏, 3G 软件手机, Android 2.2, 三星蓝牙耳机, 三星蓝牙耳机充电器, 三星蓝牙耳机充电器。

**佳能 IXUS1000**: 1000 万像素, 10 倍变焦, 1180 万像素, 全高清摄像, 赠送小长焦。

**奥林巴斯 VR350**: 1600 万像素, 10 倍光学变焦, 24MM 广角, 3.0 英寸液晶屏, 2G 卡 + 3D 眼镜 + 耳机。

**惠普 CQ43-412**: I5-2430/2G/500G/独显/14寸/正板 win7, 价格: 3499 元。

**联想 G570**: I3-2350M/2G/500G/HD7370M/DVD/1G内存/15寸, 价格: 3999 元。

**限量特惠主机**: INTEL I3-2120/4G/500G/大水牛 400W 电源/15寸, 价格: 2199 元。

**海尔天龙 A42**: 英特尔 G620/2G/750G/16 寸独立屏/正板 WIN7/20 寸侧屏 LED 液晶, 价格: 3799 元。