



21. (本小题满分13分)

如图7, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 $C_2: y = x^2 - b$ 截得的线段长等于 C_1 的长半轴长.

(I) 求 C_1 , C_2 的方程;

(II) 设 C_2 与 y 轴的交点为 M , 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_1 相交于点 A , B , 直线 MA , MB 分别与 C_1 相交于点 D , E .

(I) 证明: $MD \perp ME$;

(II) 记 ΔMAB , ΔMDE 的面积分别为 S_1 , S_2 , 问: 是否存在直线 l , 使

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}?$$

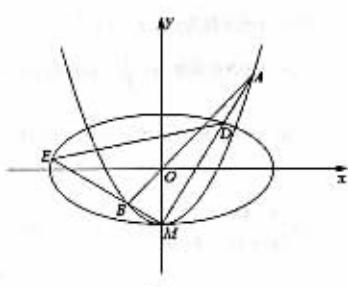


图7

解 (I) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 从而 $a = 2b$, 又 $2\sqrt{b} = a$, 解得 $a = 2$, $b = 1$.

故 C_1 , C_2 的方程分别为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y = x^2 - 1$.

(II) (i) 由题意知, 直线 l 的斜率存在, 设为 k , 则直线 l 的方程为 $y = kx$.

$$\begin{cases} y = kx \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - kx - 1 = 0.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 x_1 , x_2 是上述方程的两个实根, 于是

$$x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = -1.$$

又点 M 的坐标为 $(0, -1)$, 所以

$$\begin{aligned} k_{MA} \cdot k_{MB} &= \frac{y_1 + 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 + 1}{x_2} = \frac{(kx_1 + 1)(kx_2 + 1)}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1}{x_1 x_2} \\ &= \frac{-k^2 + k^2 + 1}{-1} = -1. \end{aligned}$$

故 $MA \perp MB$, 即 $MD \perp ME$.

• 17 •

(ii) 设直线 MA 的斜率为 k_1 , 则直线 MA 的方程为 $y = k_1 x - 1$. 由 $\begin{cases} y = k_1 x - 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = k_1, \\ y = k_1^2 - 1. \end{cases}$$

则点 A 的坐标为 $(k_1, k_1^2 - 1)$.

又直线 MB 的斜率为 $-\frac{1}{k_1}$, 同理可得点 B 的坐标为 $(-\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_1^2} - 1)$.

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2} |MA| \cdot |MB| = \frac{1}{2} \sqrt{1+k_1^2} \cdot |k_1| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}} \cdot \left| -\frac{1}{k_1} \right| = \frac{1+k_1^2}{2} |k_1|.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1 x - 1, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{得 } (1+4k_1^2)x^2 - 8k_1 x = 0. \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0, \\ y = -1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{8k_1}{1+4k_1^2}, \\ y = \frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2}. \end{cases}$$

$$\text{则点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{4k_1^2-1}{1+4k_1^2} \right).$$

又直线 ME 的斜率为 $-\frac{1}{k_1}$, 同理可得点 E 的坐标为 $(\frac{-8k_1}{1+k_1^2}, \frac{4-k_1^2}{1+k_1^2})$.

$$\text{于是 } S_2 = \frac{1}{2} |MD| \cdot |ME| = \frac{32(1+k_1^2) \cdot |k_1|}{(1+4k_1^2)(k_1^2+4)}.$$

$$\text{因此 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{64} \left(4k_1^2 + \frac{4}{k_1^2} + 17 \right).$$

$$\text{由题意知, } \frac{1}{64} \left(4k_1^2 + \frac{4}{k_1^2} + 17 \right) = \frac{17}{32}. \text{ 解得 } k_1^2 = 4, \text{ 或 } k_1^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{又由点 } A, B \text{ 的坐标可知, } k = \frac{k_1}{k_1 + \frac{1}{k_1}} = k_1 - \frac{1}{k_1}, \text{ 所以 } k = \pm \frac{3}{2}.$$

故满足条件的直线 l 存在, 且有两条, 其方程分别为 $y = \frac{3}{2}x$ 和 $y = -\frac{3}{2}x$.

22. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = x^3$, $g(x) = x + \sqrt{x}$.

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

• 18 •

三湘都市报华声在线恭祝全省高考学子心想事成!

(II) 设数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足 $a_1 = a (a > 0)$, $f(a_{n+1}) = g(a_n)$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.

解 (I) 由 $h(x) = x^3 - x - \sqrt{x}$ 知, $x \in [0, +\infty)$, 而 $h(0) = 0$, 且 $h(1) = -1 < 0$,

$h(2) = 6 - \sqrt{2} > 0$, 则 $x = 0$ 为 $h(x)$ 的一个零点, 且 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点. 因此 $h(x)$ 至少有两个零点.

解法1 $h'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, 记 $\varphi(x) = 3x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\varphi'(x) = 6x + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 因此 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点, 又因为 $\varphi(1) > 0$, $\varphi(\frac{\sqrt{3}}{3}) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 在

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 内有零点, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点. 记此零点为 x_1 , 则

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $\varphi(x) < \varphi(x_1) = 0$; 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $\varphi(x) > \varphi(x_1) = 0$.

所以,

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h(x)$ 单调递减, 而 $h(0) = 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, x_1]$ 内无零点;

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $h(x)$ 单调递增, 则 $h(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 内至多只有一个零点.

从而 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点.

综上所述, $h(x)$ 有且只有两个零点.

解法2 由 $h(x) = x(x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}})$, 记 $\varphi(x) = x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\varphi'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 从而 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点, 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点.

综上所述, $h(x)$ 有且只有两个零点.

(II) 记 $h(x)$ 的正零点为 x_0 , 即 $x_0^3 = x_0 + \sqrt{x_0}$.

(1) 当 $a < x_0$ 时, 由 $a_1 = a$, 即 $a_1 < x_0$.

而 $a_2^2 = a_1 + \sqrt{a_1} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3$, 因此 $a_2 < x_0$. 由此猜测: $a_n < x_0$. 下面用数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时, $a_1 < x_0$ 显然成立.

② 假设当 $n=k (k \geq 1)$ 时, $a_k < x_0$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时, 由 $a_{k+1}^2 = a_k + \sqrt{a_k}$

$$a_{k+1}^2 = a_k + \sqrt{a_k} < x_0 + \sqrt{x_0} = x_0^3 \text{ 知, } a_{k+1} < x_0.$$

因此, 当 $n=k+1$ 时, $a_{k+1} < x_0$ 成立.

故对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < x_0$ 成立.

(2) 当 $a \geq x_0$ 时, 由(I)知, $h(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(a) \geq h(x_0) = 0$, 即 $a^3 \geq a + \sqrt{a}$, 从而 $a^2 = a_1 + \sqrt{a_1} = a + \sqrt{a} \leq a^2$, 即 $a_2 \leq a$. 由此猜测: $a_n \leq a$, 下面用数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时, $a_1 \leq a$ 显然成立.

② 假设当 $n=k (k \geq 1)$ 时, $a_k \leq a$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时, 由 $a_{k+1}^2 = a_k + \sqrt{a_k}$

$$\leq a + \sqrt{a} \leq a^2 \text{ 知, } a_{k+1} \leq a.$$

因此, 当 $n=k+1$ 时, $a_{k+1} \leq a$ 成立.

故对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq a$ 成立.

综上所述, 存在常数 $M = \max\{x_0, a\}$, 使得对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.

• 20 •