



T04

数 学 (理工农医类)

一、选择题: 本大题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+i)i = b+i$, 则
 A. $a=1, b=1$ B. $a=-1, b=1$
 C. $a=-1, b=-1$ D. $a=1, b=-1$ [D]

2. 设集合 $M=\{1, 2\}$, $N=\{a^2\}$, 则 “ $a=1$ ” 是 “ $N \subseteq M$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件 [A]

3. 设图1是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为
 A. $\frac{9}{2}\pi+12$
 B. $\frac{9}{2}\pi+18$
 C. $9\pi+42$
 D. $36\pi+18$

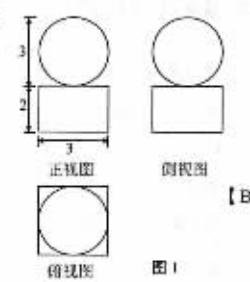


图1

4. 通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得, $K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8$.

附表:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

* 9 *

参照附表, 得到的正确结论是

- A. 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”
 B. 在犯错误的概率不超过0.1%的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”
 C. 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”
 D. 有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关” [C]

5. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1 (a > 0)$ 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$. 则 a 的值为
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 1 [C]

6. 由直线 $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$ [D]

7. 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq mx, \\ x+y \leq 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $z=x+my$ 的最大值小于2, 则 m 的取值范围为
 A. $(1, 1+\sqrt{2})$ B. $(1+\sqrt{2}, +\infty)$
 C. $(1, 3)$ D. $(3, +\infty)$ [A]

8. 设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 M , N , 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为
 A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ [D]

二、填空题: 本大题共8小题, 考生作答7小题, 每小题5分, 共35分。把答案填在答题卡中对应题号后的横线上。

(一) 选做题 (请考生在第9, 10, 11三题中任选两题作答, 如果全做, 则按前两题记分)

9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)+1=0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为 2.

10. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $xy \neq 0$, 则 $(x^2 + \frac{1}{y^2})(\frac{1}{x^2} + 4y^2)$ 的最小值为 9.

* 10 *

三湘都市报华声在线恭祝全省高考学子心想事成!

11. 如图2, A, E 是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC=4$,

$AD \perp BC$, 垂足为 D , BE 与 AD 相交于点 F , 则 AF 的长为 $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

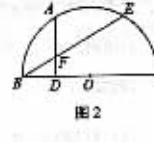


图2

(二) 必做题 (12~16题)

12. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的前 n 项和, 且 $a_1=1$, $a_4=7$, 则 $S_5=$ 25.

13. 若执行如图3所示的框图, 输入 $x_1=1$,

$x_2=2$, $x_3=3$, $\bar{x}=2$, 则输出的数等于 $\frac{2}{3}$.

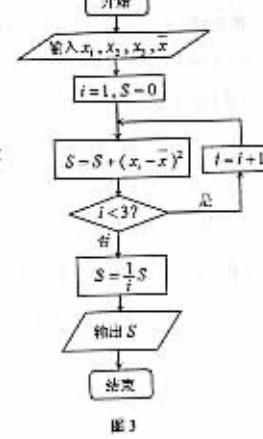


图3

14. 在边长为1的正三角形 ABC 中, 设

$\overline{BC} = 2\overline{BD}, \overline{CA} = 3\overline{CE}$, 则 $\overline{AD} \cdot \overline{BE} =$ $-\frac{1}{4}$.



图4

15. 如图4, $EFGH$ 是以 O 为圆心、半径为1的圆的内接正方形, 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”, B 表示事件“豆子落在扇形 OHE (阴影部分) 内”, 则

$$(1) P(A) = \frac{2}{\pi}, \quad (2) P(B|A) = \frac{1}{4}.$$

16. 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 将 n 表示为 $n=a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$, 当 $i=0$ 时, $a_i=1$, 当 $1 \leq i \leq k$ 时, a_i 为0或1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为0的个数 (例如: $1=1 \times 2^0$, $4=1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, 故 $I(1)=0$, $I(4)=2$), 则

$$(1) I(12)=2; \quad (2) \sum_{n=1}^{2^{10}} I(n)=1093.$$

三、解答题: 本大题共6小题, 共75分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $c \sin A = a \cos C$.

(I) 求角 C 的大小;

(II) 求 $\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4})$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

解 (I) 由正弦定理得 $\sin C \sin A = \sin A \cos C$.

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A > 0$, 从而 $\sin C = \cos C$. 又 $\cos C \neq 0$, 所以 $\tan C = 1$, 则 $C = \frac{\pi}{4}$.

(II) 由(I)知, $B = \frac{3\pi}{4} - A$. 于是

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{3} \sin A - \cos(\pi - A - \frac{\pi}{4}) \\ &= \sqrt{3} \sin A + \cos A \\ &= 2 \sin(A + \frac{\pi}{6}). \end{aligned}$$

因为 $0 < A < \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{12}$. 从而当 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时,

$$2 \sin(A + \frac{\pi}{6})$$
 取最大值2.

综上所述, $\sqrt{3} \sin A - \cos(B + \frac{\pi}{4})$ 的最大值为2, 此时 $A = \frac{\pi}{3}$, $B = \frac{5\pi}{12}$.

18. (本小题满分12分)

某商店试销某种商品20天, 获得如下数据:

日销售量(件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

* 12 *