故今年六月份该水力发电站的发电量低于490（万千瓦时）或超过530（万千瓦时）的概率为$\frac{3}{10}$.

19.（本小题满分12分）

如图3，在圆锥PO中，已知$PO=\sqrt{2}$，$\odot O$的直径$AB=2$，点C在$\overset{\frown}{AB}$上，且$\angle CAB=30^\circ$，D为AC的中点.

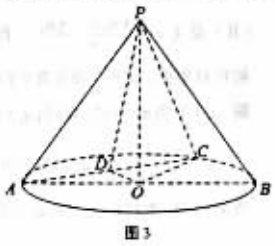
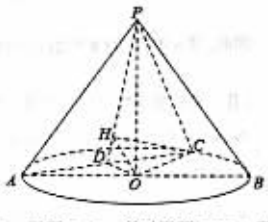


图3

（Ⅰ）证明：$AC\perp$平面POD；

（Ⅱ）求直线OC和平面PAC所成角的正弦值.



解法1 （Ⅰ）因为$OA=OC$，D是AC的中点，所以$AC\perp OD$.

又$PO\perp$底面$\odot O$，$AC\subset$底面$\odot O$，所以$AC\perp PO$. 而OD，PO是平面POD内的两条相交直线，所以$AC\perp$平面POD.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$AC\perp$平面POD，又$AC\subset$平面PAC，所以平面$POD\perp$平面PAC. 在平面POD中，过O作$OH\perp PD$于H，则$OH\perp$平面PAC. 连结CH，则CH是OC在平面PAC上的射影，所以$\angle OCH$是直线OC和平面PAC所成的角.

在$Rt\Delta ODA$中，$OD=OA\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

在$Rt\Delta POD$中，$OH=\frac{PO\cdot OD}{\sqrt{PO^2+OD^2}}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

在$Rt\Delta OHC$中，$\sin\angle OCH=\frac{OH}{OC}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

故直线OC和平面PAC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

20.（本小题满分13分）

某企业在第1年初购买一台价值为120万元的设备M，M的价值在使用过程中逐年减少. 从第2年到第6年，每年初M的价值比上年初减少10万元；从第7年开始，每年初M的价值为上年初的75%.

（Ⅰ）求第n年初M的价值a_n的表达式；

（Ⅱ）设$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，若$A_n$大于80万元，则$M$继续使用，否则须在第$n$年初对$M$更新. 证明：须在第9年初对$M$更新.

解 （Ⅰ）当$n\leqslant 6$时，数列$\{a_n\}$是首项为120，公差为-10的等差数列.

$$a_n=120-10(n-1)=130-10n;$$

当$n\geqslant 6$时，数列$\{a_n\}$是以a_6为首项，公比为$\frac{3}{4}$的等比数列. 又$a_6=70$，所以

$$a_n=70\times(\frac{3}{4})^{n-6}.$$

因此，第n年初，M的价值a_n的表达式为$a_n=\begin{cases}130-10n, & n\leqslant 6,\\ 70\times(\frac{3}{4})^{n-6}, & n\geqslant 7.\end{cases}$

（Ⅱ）设S_n表示数列$\{a_n\}$的前n项和，由等差及等比数列的求和公式得

当$1\leqslant n\leqslant 6$时，$S_n=120n-5n(n-1)$，$A_n=120-5(n-1)=125-5n$；

当$n\geqslant 7$时，由于$S_6=570$，故

$$S_n=S_6+(a_7+a_8+\cdots+a_n)=570+70\times\frac{3}{4}\times 4\times[1-(\frac{3}{4})^{n-6}]=780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6},$$

$$A_n=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}}{n}.$$

因为$\{a_n\}$是递减数列，所以$\{A_n\}$是递减数列. 又

$$A_8=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^2}{8}=82\frac{47}{64}>80,\quad A_9=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^3}{9}=76\frac{79}{96}<80,$$

所以须在第9年初对M更新.

21.（本小题满分13分）

已知平面内一动点P到点$F(1,0)$的距离与点P到y轴的距离的差等于1.

（Ⅰ）求动点P的轨迹C的方程；

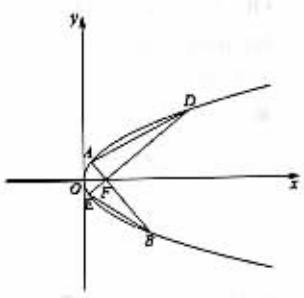
（Ⅱ）过点F作两条斜率存在且互相垂直的直线l_1，l_2，设l_1与轨迹C相交于点A，B，l_2与轨迹C相交于点D，E，求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$的最小值.

解 （Ⅰ）设动点P的坐标为(x,y)，由题意有$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-|x|=1$.

化简得 $y^2=2x+2|x|$.

当$x\geqslant 0$时，$y^2=4x$；当$x<0$时，$y=0$.

所以，动点P的轨迹C的方程为$y^2=4x$（$x\geqslant 0$）和$y=0$（$x<0$）.



（Ⅱ）由题意知，直线l_1的斜率存在且不为0，设为k，则l_1的方程为$y=k(x-1)$.

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x\end{cases}$得

$$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0.$$

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则x_1，x_2是上述方程的两个实根，于是

$$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2},\ x_1x_2=1.$$

因为$l_1\perp l_2$，所以l_2的斜率为$-\frac{1}{k}$.

设$D(x_3,y_3)$，$E(x_4,y_4)$，则同理可得

$$x_3+x_4=2+4k^2,\ x_3x_4=1.$$

故$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD})\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})$

$=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FB}$

$=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FD}|\cdot|\overrightarrow{EF}|$

$=(x_1+1)(x_2+1)+(x_3+1)(x_4+1)$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+x_3x_4+(x_3+x_4)+1$

$=1+(2+\frac{4}{k^2})+1+1+(2+4k^2)+1$

$=8+4(k^2+\frac{1}{k^2})\geqslant 8+4\times 2\sqrt{k^2\cdot\frac{1}{k^2}}=16.$

当且仅当$k^2=\frac{1}{k^2}$，即$k=\pm 1$时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$取最小值16.

22.（本小题满分13分）

设函数$f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x\ (a\in\mathbb{R})$.

（Ⅰ）讨论$f(x)$的单调性；

（Ⅱ）若$f(x)$有两个极值点x_1和x_2，记过点$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$的直线的斜率为k. 问：是否存在a，使得$k=2-a$？若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由.

解 （Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}.$$

令$g(x)=x^2-ax+1$，其判别式$\Delta=a^2-4$.

（1）当$|a|\leqslant 2$时，$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$. 故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

（2）当$a<-2$时，$\Delta>0$，$g(x)=0$的两根都小于0. 在$(0,+\infty)$上，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

（3）当$a>2$时，$\Delta>0$，$g(x)=0$的两根为$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当$0<x<x_1$时，$f'(x)>0$；当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)<0$；当$x>x_2$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$分别在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a>2$.

因为$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}-a(\ln x_1-\ln x_2)$，所以，

$$k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=1+\frac{1}{x_1x_2}-a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}.$$

又由（Ⅰ）知，$x_1x_2=1$. 于是

$$k=2-a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}.$$

若存在a，使得$k=2-a$，则$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1$. 即$\ln x_1-\ln x_2=x_1-x_2$，亦即

$$x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2=0\ (x_2>1).\ (*)$$

再由（Ⅰ）知，函数$h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$在$(0,+\infty)$上单调递增，而$x_2>1$，所以

$x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2>1-\frac{1}{1}-2\ln 1=0$，这与（*）式矛盾.

故不存在a，使得$k=2-a$.